

OPTICA ACTA

N° 1

Janvier 1954

Application des méthodes matricielles au calcul d'ensembles complexes de couches minces alternées

Charles DUFOUR

et

André HERPIN

Compagnie des Compteurs, Corbeville, France

Centre d'Etudes nucléaires de Saclay, France.

SOMMAIRE. — Les méthodes de calcul permettant la prévision des propriétés optiques d'ensembles complexes de couches minces superposées se sont considérablement développées depuis une vingtaine d'années.

Cependant, les expérimentateurs n'utilisent guère les travaux des théoriciens si la mise en œuvre des formules théoriques nécessite des connaissances mathématiques trop approfondies et si le temps nécessaire au précalcul demeure grand par rapport à celui des essais empiriques.

Nous avons condensé dans cet article les méthodes qui permettent d'obtenir rapidement les propriétés d'ensembles stratifiés de couches minces non absorbantes alternées HB HB HB d'égale épaisseur optique [1], ainsi que d'ensembles plus complexes du type HB HB-D-H'B' H'B' H'B', et avons surtout voulu montrer que, si les intermédiaires du calcul matriciel paraissent parfois compliqués, les résultats peuvent se mettre sous une forme facile à exploiter par l'utilisateur.

Des mesures expérimentales, tant sous incidence normale que sous incidence oblique, illustrent bien les résultats théoriques.

ZUSAMMENFASSUNG. — Für die Vorausberechnung der optischen Eigenschaften von Mehrfachschichten sind Rechenverfahren seit knapp zwanzig Jahren vielfach entwickelt worden.

Die Praktiker machen aber von den Arbeiten der Theoretiker Gebrauch, wenn die Anwendung der theoretischen Formeln all zu eingehende mathematische Kenntnisse erfordert und die notwendige Zeit für die Vorausberechnung gross gegenüber praktischen Versuchen wird.

Wir haben in dem nachstehenden Aufsatz die Methoden zusammengefasst, die erlauben, schnell die Eigenschaften der nicht absorbierenden Mehrfachschichten zu berechnen. Dabei können sie nach dem Schema HB HB HB mit gleicher optischer Dicke oder auch verwickelter nach dem Schema HB HB-D-H'B' H'B' H'B' aufgebaut sein. Es sollte dabei hauptsächlich gezeigt werden, dass, wenn auch die Zwischenrechnung des Matrizenkalküls manchmal unübersichtlich erscheint, die Ergebnisse sich aber doch in einer Form darstellen lassen, die den praktischen Gebrauch erleichtert.

Experimentelle Messungen bei senkrechtem und schrägem Einfall verdeutlichen die theoretischen Ergebnisse.

SUMMARY. — Methods of calculating the optical properties of complex assemblies of thin films have been considerably developed during the past twenty years.

This theoretical work will not be used by experimentalists if the formulation requires too profound a mathematical knowledge, or if the time required for calculation is large compared with that needed for empirical trial-and-error methods.

In this paper are summarised methods which permit the rapid calculation of the properties of stratified assemblies of non-absorbant thin films alternating HB HB HB of equal optical thickness (1), as well as for more complex assemblies of the type HB HB-D-H'B' H'B' H'B'; and it is shown that though the intermediate steps of the matrix calculation sometimes appear complicated, the results can be expressed in a form easy to calculate.

Experimental measurements are given both at normal and oblique incidence, which accord well with the theoretical results.

I. PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA MÉTHODE

1. Pour calculer les propriétés optiques d'un ensemble de couches stratifiées, nous utiliserons la méthode matricielle introduite par l'un de nous [2]. Elle présente l'avantage d'un formalisme simple, se prêtant facilement aux applications numériques. L'élément de base est la *matrice de propagation* d'un système stratifié quelconque qui relie le champ électromagnétique en avant du système au champ en arrière

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix} = (M) \times \begin{pmatrix} \xi' \\ \chi' \end{pmatrix}.$$

La matrice de propagation d'un ensemble de q couches caractérisées par les matrices de propagation $(M_1) \dots (M_q)$ est

$$(2) \quad (M) = (M_1) (M_2) \dots (M_q).$$

Ces matrices à deux lignes et deux colonnes peuvent s'exprimer au moyen des matrices de PAULI (σ_1) , (σ_2) , (σ_3) dont les règles de multiplication sont particulièrement simples

$$(3) \quad M = A(I) + B(\sigma_1) + C(\sigma_2) + D(\sigma_3).$$

La propriété caractéristique des matrices de propagation est d'avoir un déterminant égal à l'unité, même si les milieux sont absorbants, ce qui se traduit par la relation

$$(4) \quad A^2 - (B^2 + C^2 + D^2) = 1.$$

La matrice correspondant à la propagation dans une seule couche est caractérisée par le fait que le coefficient D est nul, comme nous le verrons plus loin, donc ses éléments diagonaux sont égaux

$$(5) \quad D = 0 \quad \text{ou} \quad M_{11} = M_{22}.$$

Ce résultat est encore valable pour tous les systèmes symétriques, ou, plus généralement, pour tous les systèmes inversibles (dont le pouvoir réflecteur à droite ou à gauche est le même).

Il est facile de vérifier que le pouvoir réflecteur complexe d'un système stratifié déposé sur un support d'indice n et placé dans un milieu d'indice n_0 a pour expression

$$(6) \quad \bar{r} = \frac{A(n_0 - n) + D(n_0 + n) + B(n_0 n - 1) - iC(n_0 n + 1)}{A(n_0 + n) + D(n_0 - n) + B(n_0 n + 1) - iC(n_0 n - 1)}.$$

Le but final de tout calcul est donc de calculer la matrice de propagation du système considéré. Ceci peut se faire en utilisant la formule (1) et l'expression de la matrice de propagation d'une couche simple. Nous terminerons cette introduction générale en donnant la forme de celle-ci. Elle exprime :

a) qu'il y a continuité des composantes tangentielles des champs sur les surfaces séparant les différents milieux ;

b) que toute onde est la superposition d'une onde se propageant dans une direction (E^+ ; $H^+ = n E^+$) et d'une onde se propageant dans la direction opposée (E^- ; $H^- = -n E^-$), la vitesse de propagation étant c/n .

Il en résulte après un calcul élémentaire que, dans le cas où l'incidence est normale, la matrice de propagation d'une seule couche a pour valeur

$$(7) \quad (M) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & i \frac{1}{n} \sin \varphi \\ i n \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}; \quad \varphi = 2\pi \frac{ne}{\lambda_0}$$

n : indice de la couche, e : épaisseur, λ_0 : longueur d'onde dans le vide.

Lorsque l'incidence n'est plus normale, la même méthode peut encore être appliquée, à condition toutefois de n'écrire que l'égalité des composantes tangentielles des champs, et de considérer que l'épaisseur optique d'une couche est $ne \cos i$ ce qui revient à remplacer la phase φ par

$$(8) \quad \bar{\varphi} = \varphi \cos i.$$

Si l'onde est polarisée dans le plan d'incidence, le champ électrique est tangentiel, et par conséquent il n'y a pas de modification par rapport au cas normal. Mais le champ magnétique fait avec le plan de séparation un angle égal à l'angle d'incidence, d'où la condition

$$(9) \quad H_1 \cos i_1 = H_2 \cos i_2.$$

On en déduit facilement (en se souvenant que $H^+ = n E^+$ et que $H^- = -n E^-$) qu'il suffit de remplacer n par

$$(10) \quad \bar{n} = n \cos i.$$

Si l'onde est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, on montre de la même façon qu'il suffit de remplacer n par

$$(10') \quad \bar{n} = n / \cos i.$$

D'où les expressions de la matrice de propagation d'une seule couche

$$(11) \quad (M_{||}) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi \cos i) & i n \cos i \cdot \sin(\varphi \cos i) \\ \frac{i}{n \cos i} \cdot \sin(\varphi \cos i) & \cos(\varphi \cos i) \end{bmatrix},$$

$$(12) \quad (M_{\perp}) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi \cos i) & i \frac{n}{\cos i} \cdot \sin(\varphi \cos i) \\ i \frac{\cos i}{n} \cdot \sin(\varphi \cos i) & \cos(\varphi \cos i) \end{bmatrix}.$$

II. CAS DE L'INCIDENCE NORMALE

1. La méthode générale que nous venons de développer permet bien de calculer les propriétés de tous les empilements, si compliqués qu'ils soient on ne peut cependant obtenir de résultats généraux que dans des cas particuliers, d'ailleurs très souvent utilisés en pratique pour les filtres interférentiels. Nous avons étudié en détail le cas des empilements formés de doubles couches semblables, chaque double couche étant formée de deux couches de même épaisseur optique. La simplification provient du théorème suivant [3].

Si une matrice est mise sous la forme

$$(13) \quad (M) = A(I) + B(\tau_1) + C(\tau_2) + D(\tau_3),$$

la puissance q ème de cette matrice a pour expression

$$(14) \quad (M^q) = F_q(A) + G_q(A) \left\{ B(\sigma_1) + C(\sigma_2) + D(\sigma_3) \right\},$$

$F_q(A)$ et $G_q(A)$ étant les polynômes de LUCAS de degré q ; ces polynômes prennent une forme particulièrement simple moyennant le changement de variable

$$(15) \quad A = \cos \theta,$$

soit, dans le cas où (M) est la matrice de propagation d'une double couche (n_1, n_2) :

$$(16) \quad \sin \theta/2 = \frac{n_1 + n_2}{2 \sqrt{n_1 n_2}} \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} \sin \varphi_0$$

avec $r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$.

Cette transformation nous donne pour F_q et G_q des expressions trigonométriques de φ lorsque φ est inférieur à la phase critique

$$\varphi_c = \arcsin \sqrt{1 - r^2}$$

et des fonctions exponentielles lorsque φ est supérieur à φ_c . Ce changement de variable nous donne une expression exploitable de r_q , pouvoir réflecteur complexe du système :

$$(17) \quad r_q = \frac{H_q(A)(n_0 - n) + D(n_0 + n) + B(n_0 n - 1) - iC(n_0 n + 1)}{H_q(A)(n_0 + n) + D(n_0 - n) + B(n_0 n + 1) - iC(n_0 n - 1)},$$

$$H_q = \frac{F_q(A)}{G_q(A)} \quad (n_0 \text{ et } n \text{ sont les indices des milieux extrêmes})$$

soit, sous une forme plus maniable,

$$(18) \quad r_q = \frac{n_0 - n}{n_0 + n} \frac{X_q + utg \varphi + iv}{X_q + u'tg \varphi + iv'}, \quad X_q = \frac{\sin \theta \cotg q\theta}{\sin \varphi \cos \varphi};$$

$$u = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2 n_1 n_2} \frac{n_0 + n}{n_0 - n}, \quad u' = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2 n_1 n_2} \frac{n_0 - n}{n_0 + n},$$

$$v = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \frac{n_0 n - n_1 n_2}{n_0 - n}, \quad v' = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \frac{n_0 n + n_1 n_2}{n_0 + n}.$$

La représentation graphique de la formule (18) permet d'aboutir à des propriétés générales simples des fonctions $r_q(\varphi)$ et par suite d'en faciliter le tracé.

Pour cela nous devons effectuer une inversion convenablement choisie de la figure obtenue en portant dans le plan complexe les points figuratifs du numérateur $X_q + u \operatorname{tg} \varphi + i v$ et du dénominateur $X_q + u' \operatorname{tg} \varphi + i v'$.

La construction suivante conduit alors à la valeur directe de r_q (fig. 1).

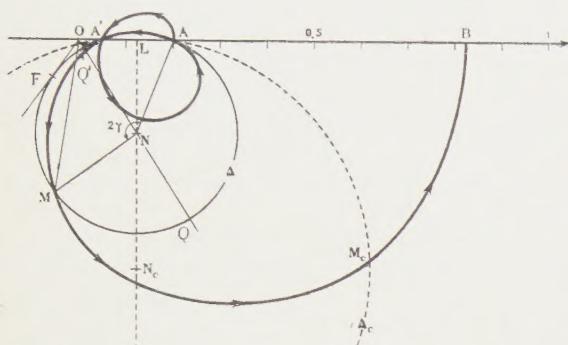


FIG. 1.

On porte sur l'axe Ox les longueurs

$$OA = r_0 = \frac{n_0 - n}{n_0 + n}, \quad OA' = r'_0 = \frac{n_0 n - n_1 n_2}{n_0 n + n_1 n_2}$$

LN est la médiatrice du segment AA' .

$$(19) \quad LN = h \operatorname{tg} \varphi \quad \text{avec} \quad h = \frac{n_0 n}{n_0 + n} \frac{n_1 - n_2}{n_0 n + n_1 n_2}.$$

On trace le cercle (Δ) de rayon NA et on porte à partir de NA l'angle $MNA = 2\gamma$ tel que

$$(20) \quad \cotg \gamma = \frac{u' \operatorname{tg} \varphi + X_q}{v'}$$

Nous verrons plus loin que, pour q grand et φ petit, γ reste voisin de $q\theta$.

Le vecteur OM représente la grandeur complexe cherchée r_q .

Quand φ varie de 0 à 2π , le point M décrit $2q$ ou $2q - 1$ lobes passant par A et A' suivant que $OA = r_0$ est supérieur ou non à $OA' = r'_0$.

La construction reste valable pour $\varphi > \varphi_c$, seule l'expression de X_q dans (20) prenant sa forme exponentielle.

a) *Propriétés générales de $r_0(\varphi)$.* — Nous voyons dès maintenant que seules les valeurs de γ sont affectées par le nombre q de doubles couches ; les autres grandeurs qui nous ont servi pour la construction ne dépendent en effet que de n_0, n_1, n_2, n et φ .

Si nous prenions q comme paramètre (les valeurs entières correspondant seules à des couches ayant une existence physique) M décrirait le cercle (Δ) pour une valeur donnée de φ . On en déduit que r_q varie, quel que soit q entre 2 limites OQ et OQ' obtenues par intersection du diamètre ON par le cercle (Δ). Par suite, toutes les courbes $r_q(\varphi)$ sont comprises entre

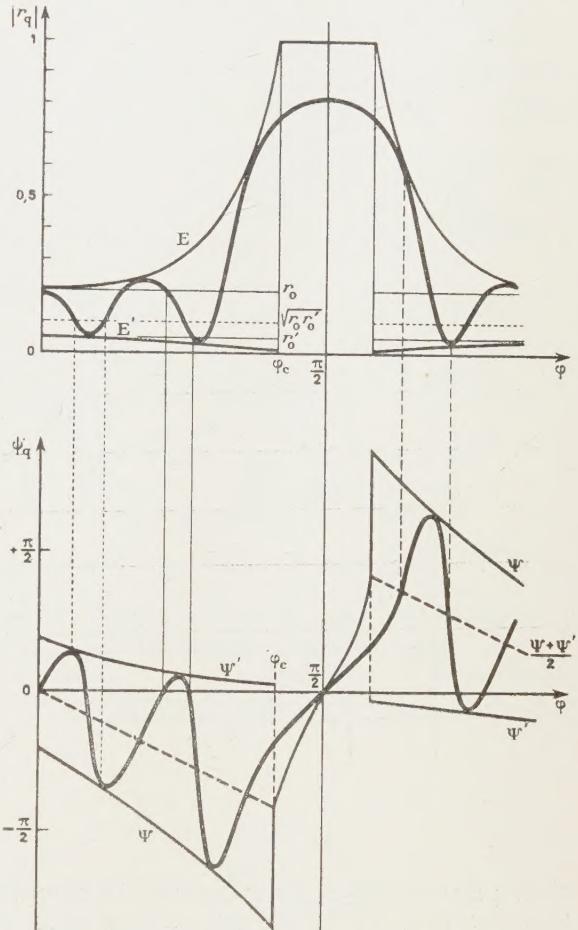
2 courbes $E(\varphi)$ et $E'(\varphi)$ que nous appellerons enveloppes supérieure et inférieure.

La courbe (E') se déduit immédiatement de (E) puisque

$$(21) \quad \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r_0 r'_0 = \text{constante.}$$

On obtient l'expression analytique de ces enveloppes en écrivant $OQ = ON + NA$ et en remplaçant ON et NA par leurs valeurs $\sqrt{\overline{OL^2} + \overline{LN^2}}$ et $\sqrt{\overline{AL^2} + \overline{LN^2}}$. On obtient

$$(22) \quad \frac{OQ}{OQ'} = \sqrt{\left(\frac{(r_0 + r'_0)^2}{2}\right) + h^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \pm \sqrt{\left(\frac{(r_0 - r'_0)^2}{2}\right) + h^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

FIG. 2. — Correspondance entre phases Ψ_q et amplitudes $|r_q|$.

Points de contact de $\Psi_q(\varphi)$ avec ses enveloppes

$$\dots \dots \left\{ \begin{array}{l} |r_q| = \sqrt{r_0 r'_0} \\ \Psi_q = 0 \end{array} \right.$$

$$\dots \dots \left\{ \begin{array}{l} |r_q| = r_0 \text{ ou } r'_0 \\ \Psi_q = \Psi \text{ ou } \Psi' \end{array} \right.$$

$$\dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \Psi_q = \frac{\Psi + \Psi'}{2} \text{ (voir fig. 1 ON bissectrice de } \widehat{FOF'}) \\ \text{Points de contact de } |r_q| \text{ avec ses enveloppes.} \end{array} \right.$$

La figure 2 montre l'allure de la courbe $r_q(\varphi)$ et les positions respectives des enveloppes.

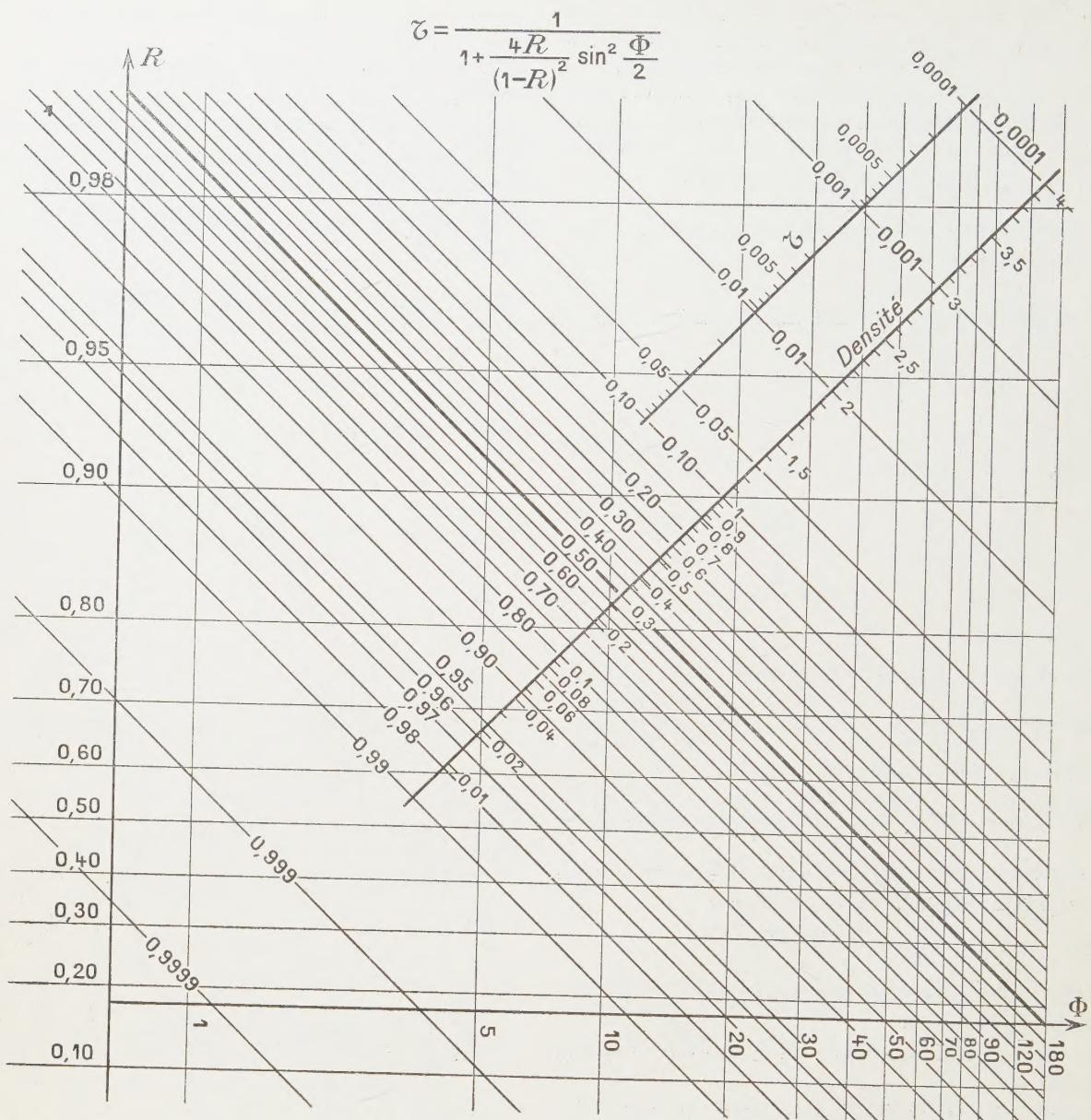


FIG. 3

Pour q assez grand (> 4 par exemple) les premières oscillations de la courbe $|r_q|$ sont faciles à tracer car $\operatorname{tg} \varphi$ est petit, $2 \sin \theta / \sin 2\varphi$ reste voisin de 1 et $\cot \gamma$ est proportionnel à $\cot \varphi$.

Les valeurs de θ et, par suite, de φ correspondant aux points de contact avec les enveloppes se déterminent très facilement à partir de $2\gamma = \widehat{\text{ONA}}$ et $2\gamma = \widehat{\text{ONA}} + \pi$ sur la construction graphique (fig. 1).

La détermination est moins simple quand φ se rapproche de φ_c .

On peut aussi remarquer que $2\gamma = 2\pi$ en même temps que $q\theta = k\pi$ les deux cotg prenant une valeur infinie en même temps, il en résulte que $|r_q|$ a toujours la va-

leur r_c pour $\theta = k\pi/q$, d'où un certain nombre de points de la courbe $|r_q(\varphi)|$.

b) Propriétés générales de $\psi_q(\varphi)$. — La figure 1 nous donne aussi des indications sur la phase $\psi = \arg r_q$. En particulier, la courbe des phases ψ possède deux enveloppes si O est extérieur à A'A.

$\psi_q = \widehat{\text{MOA}}$ oscille alors entre des valeurs extrêmes obtenues lorsque OM est tangent à (1).

Les points de contact de ψ_q et de ses enveloppes Ψ et Ψ' sont définis par

$$(23) \quad |r_q| = OF = \sqrt{\text{OA} \cdot \text{OA}'} = \sqrt{r'_0 r_0} \quad (\text{fig. 1})$$

d'où une correspondance simple entre courbes des phases et des amplitudes.

$$(24) \quad \operatorname{tg} \frac{\Psi + \Psi'}{2} = \frac{LN}{OL} = \frac{2h \operatorname{tg} \varphi}{r_0 + r'_0} = \frac{n_0(n_1 - n_2)}{n_0^2 - n_1 n_2} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$(25) \quad \cos \frac{\Psi - \Psi'}{2} = \frac{OF'}{ON} = \frac{2\sqrt{OQ \cdot OQ'}}{OQ + OQ'} = 2 \frac{\sqrt{(E)(E')}}{(E)+(E')}$$

de plus la phase ψ passe par zéro pour $r_q = r_0$ et $r_q = r'_0$.

2. Ensembles complexes. — Cet ensemble de résultats ne s'applique qu'aux couches du type BH BH BH. Mais si nous considérons un système plus complexe de couches non absorbantes et si nous l'assimilons à un étalon de FABRY-PEROT à miroirs semi-transparents complexes \mathfrak{M} et \mathfrak{M}' nous serons à même de calculer de nouveaux systèmes tels que

$$\underbrace{\text{BH BH BH}}_{\mathfrak{M}} - D - \underbrace{\text{H'B' H'B' H'B' H'B'}}_{\mathfrak{M}'}$$

La formule bien connue de l'étalon de FABRY-PEROT donne alors

$$(26) \quad \mathfrak{T} = \frac{T T'}{(1 - r r')^2} \frac{1}{1 + m \sin^2 \frac{\Phi + \psi + \psi'}{2}}$$

\mathfrak{T} : transmission de l'ensemble,

TT' : transmission de \mathfrak{M} et \mathfrak{M}' ,

rr' : pouvoirs réflecteurs (amplitudes) de \mathfrak{M} et \mathfrak{M}' vers D.

$$m = \frac{4rr'}{(1 - rr')^2},$$

$$\Phi = \frac{4\pi n e}{\lambda} \text{ avec } ne \text{ épaisseur optique de D.}$$

La différence avec un étalon usuel consiste en ce que $r r' T T' \psi \psi'$ sont des fonctions de λ . Le calcul point par point de la courbe $\mathfrak{T}(\lambda)$ demeure cependant très rapide grâce à l'abaque représenté figure 3.

On a porté en abscisses $x = \log \sin \Phi/2$ avec

$$\Phi = \varphi + \psi + \psi'$$

et en ordonnées $\varphi = \log m$.

Les courbes $\mathfrak{T} = \text{Cte}$ sont alors des droites parallèles à la seconde bissectrice.

Dans les applications que nous allons donner, les pouvoirs réflecteurs complexes $|r_q| e^{i\psi_q}$ des sous-ensembles type BH BH... ont été déterminés par les méthodes matricielles et la transmission de l'ensemble \mathfrak{T} par l'abaque représentant la formule (26).

a) *Application au calcul des filtres interférentiels à bande étroite de transparence.* — Ces filtres sont constitués par deux ensembles identiques de couches alternées H et B d'épaisseur $\lambda_0/4$ séparés par une couche centrale d'épaisseur $k \lambda_0/2$.

Nous avons réalisé de tels filtres à 9-11-13-15 couches. La figure 4 permet la comparaison du calcul et de l'expérience pour un ensemble

Verre — HB HB — 2 H — BH BH — air,

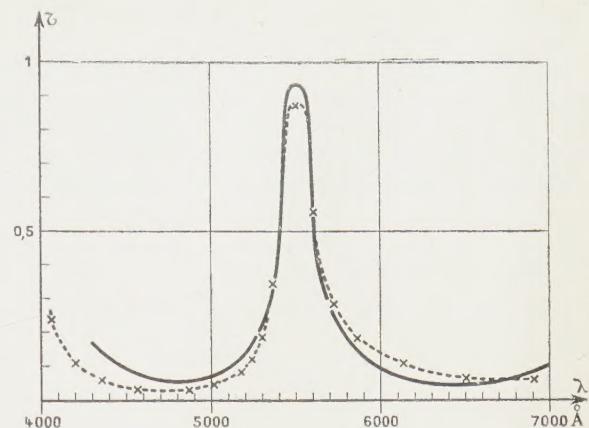


FIG. 4

le milieu de haut indice étant constitué par du sulfure de zinc $n_2 = 2,3$ et les couches de bas indice par de la cryolithe $n_1 = 1,38$.

La largeur de bande théorique à mi-hauteur $\Delta\lambda = 240 \text{ Å}$ coïncide bien avec la valeur calculée $\Delta\lambda = 250 \text{ Å}$. La dissymétrie de la courbe expérimentale traduit les inégalités d'épaisseur des couches élémentaires.

b) *Application aux irrégularités d'épaisseur d'une des couches d'un ensemble à couches égales BH BH BH...* — On considère successivement divers étalons de FABRY-PEROT fictifs suivant la position de la couche d'épaisseur aberrante comme l'indique le schéma suivant relatif à un ensemble de 13 couches.

HB — α H — BH BH BH BH BH

HB HB — α H — BH BH BH BH

HB HB HB — α H — BH BH BH

On prend pour α des valeurs telles que 1,05, 1,10, 1,15 et on peut aisément calculer l'influence de la variation d'épaisseur d'une des couches de haut indice en fonction de sa position dans le système.

La figure 5 montre l'influence d'une irrégularité d'épaisseur de 10% sur la couche centrale de bas indice

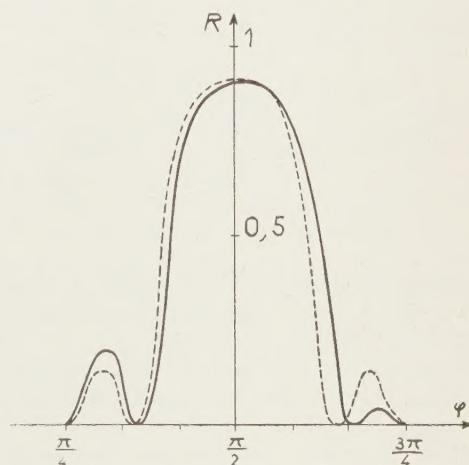


FIG. 5

d'un système à 9 couches verre — BH BH B HB HB — verre (sulfure de zinc-cryolithe).

On peut constater que le corps central de la bande de réflexion reste très peu altéré, par contre une dissymétrie importante apparaît entre les premiers maxima secondaires de part et d'autre du pic central.

Les figures 6a, 6b, 6c révèlent comment se déforme

On doit noter aussi que, alors que m_2 se déplace progressivement en m'_2 et m''_2 vers les grandes longueurs d'onde, le minimum m_1 ne se déplace pratiquement pas. Cela est dû à la nature différente de ces minima : m_2 provient d'un déphasage $\Phi + \psi + \psi' = 2k\pi$ de l'étalement fictif équivalent au système, tandis que m_1 provient d'un facteur de réflexion nul pour les couches BHBH constituant les miroirs complexes de ce même étalon.

III. CAS DE L'INCIDENCE OBLIQUE

1. Ainsi que nous l'avons montré au paragraphe I, les méthodes générales peuvent être appliquées, même en incidence oblique. Cependant, les formules ne sont maniables que dans le cas où l'incidence est faible (inférieure à 30°). On peut alors écrire

$$\bar{\varphi} = \varphi - \varphi \frac{i^2}{2} = \varphi - \varphi \frac{i^2_0}{2n^2}$$

et

$$\bar{n} = n \left(1 + \epsilon \frac{i^2_0}{2n^2} \right),$$

ϵ étant égal à ± 1 suivant la polarisation et i_0 étant l'angle d'incidence dans l'air. Dans ces conditions la matrice de propagation prend la forme

$$\bar{M} = M + \frac{i^2_0}{2} (m)$$

$$(m) = a(I) + b\sigma_1 + c\sigma_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/n^2 \varphi \sin \varphi & \mathbf{i} \epsilon \frac{1}{n} \sin \varphi - \mathbf{i} \frac{1}{n} \varphi \cos \varphi \\ 4\epsilon \frac{1}{n^3} \sin \varphi - \frac{1}{n^3} \varphi \cos \varphi & \frac{1}{n^2} \varphi \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

On peut poursuivre des calculs semblables (un peu plus pénibles !) à ceux faits en incidence normale. Nous avons traité en détail le problème suivant : On considère un ensemble semi infini de doubles couches alternées $n_1 | n_2 | n_1 | \dots$ de même épaisseur optique plongé dans un milieu d'indice n_2 . Sous incidence normale, le pouvoir réflecteur passe par un maximum pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Au voisinage de ce maximum, la phase ψ de la lumière réfléchie varie linéairement avec φ . Nous avons cherché, dans cette région, comment variait cette phase pour les faibles incidences.

La matrice de propagation d'une double couche s'écrivant :

$$(27) \quad \bar{M} = (\bar{M}_1) (\bar{M}_2) = M + \frac{i^2_0}{2} (m) = \bar{A} + \bar{B}(\sigma_1) + \bar{C}(\sigma_2) + \bar{D}(\sigma_3),$$

$$(28) \quad (m) = (M_1) (m_2) + (m_1) (M_2) = a + b(\sigma_1) + c(\sigma_2) + d(\sigma_3).$$

Le pouvoir réflecteur complexe dans la bande de réflexion $\varphi > \varphi_c$ conserve un module constant égal à l'unité pour q infini, aussi peut-on l'exprimer sous la forme $r = e^{2i\psi}$. Si nous remarquons d'autre part que

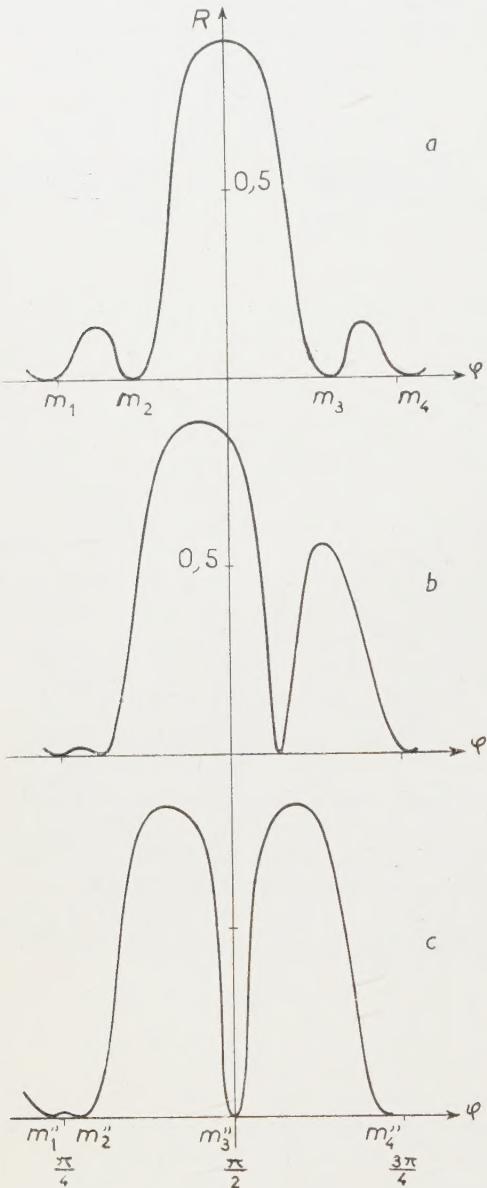


FIG. 6

la courbe des facteurs de réflexion $R(\varphi)$ d'un ensemble BHBH — B — HBHB quand la couche centrale passe de l'épaisseur $\lambda_0/4$ à l'épaisseur $\lambda_0/2$ (cas du filtre interférentiel à bande étroite de transmission).

On voit que le premier minimum contigu à la bande de réflexion du côté des courtes longueurs d'onde m_3 se déplace progressivement pour devenir en m''_3 le minimum central de réflexion, c'est-à-dire la bande de transparence étroite.

ce pouvoir réflecteur pour $q \infty$ n'est autre que r_i , pouvoir réflecteur itératif (à condition que le milieu baignant la face d'entrée soit n_2), nous pouvons simplifier considérablement les calculs et mettre $\cotg \psi$ sous la forme

$$(29) \quad \cotg \psi = \overline{S}_0 (\overline{B}^* - \overline{C}),$$

$$\overline{S}_0 = S_0 + \frac{i^2_0}{2} s_0 = \frac{\overline{n}_2}{\sqrt{\overline{A}^2 - 1 - \overline{D}}}.$$

Au voisinage de $\varphi = \pi/2$, $\overline{B}^* - \overline{C}$, S_0 et s_0 se développent de la manière suivante :

$$(30) \quad \overline{B}^* - \overline{C} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \chi +$$

$$+ \frac{i^2_0}{2} \left[\frac{n_1 + n_2}{n_1^2 + n_2^2} \left(\frac{\pi}{2} - \chi \right) - \varepsilon \frac{n^3_1 + n^3_2}{n^3_1 n^3_2} \chi \right],$$

$$S_0 = \frac{n_1 n^2_2}{n^2_2 - n^2_1}, \quad s_0 = \varepsilon \frac{n_1}{n^2_2 - n^2_1} \left(\chi = \frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

d'où la variation de la phase 2ψ en fonction de l'angle d'incidence i_0 et de la variation de longueur d'onde, $\Delta \lambda/\lambda = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$, λ_0 correspondant à $\varphi = \pi/2$.

$$(31) \quad 2\psi = \pi \left\{ \frac{1}{n_1(n_2 - n_1)} \frac{i^2_0}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \left[\frac{n_2}{n_2 - n_1} - \frac{i^2_0}{2} \frac{n_1 + \varepsilon(n_2 - n_1)}{n^2_1(n_2 - n_1)} \right] \right\}.$$

2. Application aux filtres interférentiels à bande étroite de transparence du type « Multidiélectriques » :

$\underbrace{\text{HB}}_{\mathfrak{M}} \underbrace{\text{HB}}_{\mathfrak{M}} \underbrace{\text{HB}}_{\mathfrak{M}} - 2\text{H} - \underbrace{\text{BH}}_{\mathfrak{M}} \underbrace{\text{BH}}_{\mathfrak{M}} \underbrace{\text{BH}}_{\mathfrak{M}}.$ — Nous avons

déjà calculé les propriétés de tels filtres sous incidence normale ; nous allons maintenant essayer de prévoir le déplacement de la bande de transmission en fonction de l'incidence. Pour cela nous supposerons que le changement de phase à la réflexion à la surface de séparation de la couche 2H et des miroirs \mathfrak{M} est le même que pour un nombre infini de couches HB. Nous le justifierons plus loin.

L'expression de la variation du déphasage entre deux rayons émergents successifs pour l'étalon de Fabry-Pérot équivalent au système complexe s'écrit :

$$(32) \quad \Delta\Phi = 2\Delta\psi + 2\pi \frac{ne}{\lambda} \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) - 2\pi \frac{ne}{\lambda_0} [ne = \lambda_0/2]$$

$$= 2\Delta\psi + \pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{2n^2_2} i^2_0 \right) - \frac{\pi}{2n^2} i^2_0.$$

On en déduit la variation de la longueur d'onde de la bande de transmission du filtre avec l'incidence

$$(33) \quad \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{n_1(n_2 - n_1)} + \frac{1}{n^2_2} \right) i^2_0}{2 + \frac{2n_2}{n_2 - n_1} - \left[\frac{1}{n^2_2} + \frac{n_1 + \varepsilon(n_2 - n_1)}{n^2_1(n_2 - n_1)} \right] i^2_0}.$$

Il est visible sur cette formule que

a) la loi de variation de $\Delta\lambda$ avec i_0 est en gros une loi parabolique ;

b) les courbes $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}(i_0)$ pour les deux polarisations sont surosulatrices à l'origine, d'où une très faible influence de la polarisation.

Nous avons vérifié expérimentalement ces résultats sur des filtres à 13 couches cryolitho-sulfure de zinc :

Verre — HBHBHB — 2H — BHBHBH — verre.

La valeur $\frac{\lambda_0 - \lambda_{30}}{\lambda_0}$ pour $i_0 = 30$ degrés a été calculée pour $n_1 = 1,38$, $n_2 = 2,30$ d'après la formule 33.

Suivant la polarisation $\frac{\lambda_0 - \lambda_{30}}{\lambda_0} = 0,0366$ ou $0,0354$, soit en moyenne $0,0360$.

Les essais ont porté sur 4 filtres :

λ_0	5 180	5 460	5 920	6 610	Å
$\lambda_0 - \lambda_{30}$ calculé	185	195	210	240	Å
$\lambda_0 - \lambda_{30}$ expérimental ..	175	200	160	290	Å

Alors que l'accord est excellent pour les filtres 5 180 et 5 460 la concordance n'est réalisée qu'à $\pm 25\%$ près pour les échantillons 5 920 et 6 610. Il faut probablement accuser les écarts entre épaisseurs théoriques et réelles des couches élémentaires constituant les filtres, écarts mis en évidence d'ailleurs par la dissymétrie de la courbe de transmission en fonction de $1/\lambda$, c'est-à-dire φ .

L'erreur commise en assimilant le sous-ensemble :

- BH BH BH à une suite semi infinie de couches
- BH BH BH... reste très au-dessous des écarts observés.

En effet nous avons déjà calculé dans une publication antérieure le terme $d\psi/d\varphi$ sous incidence normale en fonction de q et obtenu les résultats suivants

$$q = \begin{matrix} 2 & 3 & \dots & \infty \\ d\psi/d\varphi = & 1,20 & 1,38 & 1,50 \end{matrix} \text{ pour } \varphi = \pi/2,$$

ce qui nous montre que seules les couches voisines de la couche centrale jouent un rôle actif dans la détermination de la phase, tout au moins au voisinage de $\varphi = \pi/2$ (il n'en est pas de même pour $\varphi < \varphi_c$).

D'autre part, le calcul numérique nous montre que la variation d'épaisseur optique $2ne(1 - \cos i)$ de la couche centrale 2H correspond aux 2/3 de la variation de la phase totale de l'étalon équivalent au système complet.

Ainsi une erreur de 10 à 15 % sur ψ due à la confusion d'un ensemble HB HB HB avec une infinité de couches se traduit par une imprécision inférieure à 5 % sur la loi $\lambda = f(i_0)$ étudiée.

Le dédoublement des bandes de transmission sous incidence oblique suivant la polarisation correspond bien aux prévisions théoriques ($\lambda_{\parallel} = f(i_0)$, $\lambda_{\perp} = f'(i_0)$ surosulatrices) jusqu'à $i_0 = 30$ degrés, la différence ($\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}$) reste si faible qu'il est difficile de la mettre expérimentalement en évidence.

Nous avons relevé $\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}$ pour $i_0 = 30$ degrés et comparé à la valeur théorique $(\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp})_{30} = 0,0012 \lambda_0$.

λ_0	5 180	5 460	5 920	Å
$\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}$ théorique	6,4	6,5	7,1	Å
$\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}$ expérimental ..	5 ± 1	7,5 ± 1	11 ± 1	Å

Ces résultats montrent bien l'intérêt des filtres multiélectriques à couche centrale de haut ind ce par rapport aux filtres de FABRY-PEROT classiques Ag — cryolithie — Ag pour lesquels le dédoublement $\lambda_{II} - \lambda_I$ pour 30 degrés est au moins 4 fois plus grand (pour un filtre du premier ordre).

RÉFÉRENCES

- [1] C. DUFOUR et A. HERPIN, *Jl Phys.*, t. 18, 1952, p. 88.
- [2] A. HERPIN, *C. R. Ac. Sc.*, t. 226, 1947, p. 1872.
- [3] A. HERPIN, *C. R. Ac. Sc.*, t. 225, 1947, p. 182.
- [4] C. DUFOUR, *Rev. Opt.*, t. 31, 1952, p. 1.
- [5] Lord RAYLEIGH, *Proc. Royal Soc.*, t. 86 A, 1912, p. 207.

- [6] F. ABELÈS, *C. R. Ac. Sc.*, t. 223, 1949, p. 891 et 1112.
- [7] P. COTTON et M. PERROT, *Ann. Physique*, t. 20, 1945, p. 585.
- [8] D. CABALLERO, *Jl. opt. Soc. Amer.*, t. 37, 1947, p. 176.
- [9] P. ROUARD, *Ann. Physique*, t. 7, 1937, p. 291.
- [10] A. VASIČEK, *Jl. Phys.*, t. 11, 1950, p. 432.
- [11] F. SCANDONE, *Jl. Phys.*, t. 11, 1950, p. 336.
- [12] D. CANALS FRAU, *Rev. Opt.*, t. 31, 1952, p. 161.
- [13] N. CABRERA, *C. R. Ac. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1045 et 1146.
- [14] L. BRILLOUIN, *Wave propagation in periodic structures*, Mac Graw Hill, New York, 1945.
- [15] M. PARODI, *Memorial Sciences physiques*, t. 47, 1944.
- [16] L. BRILLOUIN, *Jl. Phys.*, t. 7, 1936, p. 401.
- [17] F. ABELÈS, Thèse, Paris, 1949.
- [18] C. DUFOUR, *Rev. Opt.*, t. 32, 1953, p. 321.

Manuscrit reçu le 19 mars 1953.

INFORMATION

Le prix Nobel de Physique 1953 vient d'être décerné au Professeur F. ZERNIKE.

Optica acta se fait un plaisir de présenter à cet éminent physicien ses très vives félicitations.

Un article sur les travaux du Professeur ZERNIKE sera prochainement publié dans cette revue, qui traitera particulièrement de ceux qu'il a consacrés à l'Optique.

INFORMATION

Nous avons été informés de la préparation de deux colloques concernant l'Optique, pour la fin de l'été 1954, en Italie :

Le premier aura pour sujet l'infrarouge et, en particulier, les instruments pour l'infrarouge ; il sera organisé à Parme, en l'honneur du centenaire de MELLONI, par les soins de la Société Italienne de Physique et sous le patronage de l'Union Internationale de Physique.

Les détails complémentaires pourront être demandés au Professeur G. POLVANI, Via Saldini, 50, Milano.

Le deuxième sera consacré aux problèmes actuels de l'optique : rétine, appareils nouveaux — à indice de réfraction variable, lentilles métalliques pour micro-ondes ... —, problèmes optiques de la télévision, optique et cybernétique.

Il sera organisé à Florence, par les soins de l'*Istituto Nazionale di Ottica* ; les renseignements complémentaires pourront être obtenus auprès de Mr G. TORALDO DI FRANCIA, *Istituto Nazionale di Ottica*, Arcetri-Firenze (529).

BIBLIOGRAPHIE

Onde elettromagnetiche, par G. TORALDO DI FRANCIA, 286 pages, éd. N. Zanichelli (Bologna). Cet ouvrage donne le développement de leçons professées par l'auteur à l'Université de Florence. Après une introduction mathématique, on étudie les bases de la théorie électromagnétique, la propagation, la réflexion, la réfraction et la diffraction des ondes, sans oublier le cas des milieux non homogènes. La fin de l'ouvrage

est consacrée à l'étude des guides d'ondes et des cavités résonnantes.

L'ensemble constitue une précieuse mise au point des connaissances actuelles et se signale par sa clarté et sa concision.

Nous pensons que l'accueil réservé par les opticiens à cet ouvrage sera des plus favorables.

A. M.

Über die Lichtverteilung im Bild eines Linienstückchens bei Aberrationsfunktionen 2. Grades in den Pupillenvariablen

von Rudolf KRIEGER

Mathematisches Institut der Justus-Liebig-Hochschule, Giessen

ZUSAMMENFASSUNG. — Zur Berechnung der Helligkeit im Bild eines meridionalen bzw. sagittalen Linienstückchens wird eine Vorschrift angegeben, die für Aberrationsfunktionen beliebigen Grades in den Pupillenvariablen gültig ist. Die Vorschrift wird in dieser Arbeit jedoch nur auf Aberrationsfunktionen 2. Grades in den Pupillenvariablen angewandt; die Helligkeitsverteilungen lassen sich dann durch elementare Funktionen ausdrücken. Um einen Überblick über die Gesamtheit der dabei möglichen Helligkeitsverteilungen zu erhalten, sind die typischen Helligkeitskurven zusammengestellt.

SUMMARY. — A method of calculation of the light intensity in the image of a meridional or sagittal line element is given which is valid for aberration functions of any degree in the pupil variables.

The method is used in this paper only for aberration functions of second degree in the pupil variables; the light distribution can then be expressed by simple functions. Typical curves of light distribution are given.

SOMMAIRE. — On donne une méthode de calcul de l'intensité lumineuse dans l'image d'un élément linéaire situé dans le plan méridien ou dans le plan perpendiculaire à ce dernier; cette méthode est valable pour les fonctions d'aberrations de degré quelconque par rapport aux variables pupillaires.

La méthode n'est utilisée dans le présent travail que pour les fonctions d'aberrations du 2^e degré en fonction des variables pupillaires. Les répartitions d'intensité lumineuse sont ensuite exprimées par des fonctions élémentaires. Des courbes de répartition d'intensité lumineuse sont données comme exemples typiques.

EINLEITUNG

Ein optisches System aus zentrierten Kugelflächen, etwa ein photographisches Objektiv, vermittelt von einem Objekt eine mit Aberrationen behaftete Abbildung. Wir wollen hier die Abbildung nach der geometrischen Optik behandeln, d. h. alle Interferenz und Beugungsscheinungen vernachlässigen. Die auftretenden Aberrationen, die aus den Konstruktionsdaten des Systems erreichbar sind, bestimmen die Lichtverteilung im Bild des Objekts. Entwickeln wir nun die Aberrationen in Potenzreihen nach den Pupillenkoordinaten und brechen die Entwicklung nach den Gliedern 2. Grades ab, so erhalten wir als Entwicklungskoeffizienten die Bildfehler: Rinnenfehler, Koma, meridionalen und sagittalen Schnittweitenfehler, und dann können wir ebenso gut sagen, dass die Lichtverteilung durch diese Bildfehler bestimmt wird. Als Objekt wollen wir ein Linienstückchen betrachten; ein solches ist ein häufig auftretendes Element photographischer Objekte. Kennt man die Abhängigkeit der Lichtverteilung im Bild des Linienstückchens von den Bildfehlern, so kann man die Bildfehler des Objektivs so korrigieren, dass diese Helligkeitsverteilung günstig wird.

Im folgenden werden die Formeln, die die Helligkeit als Funktion der Bildfehler: Rinnenfehler, Koma, meridionalen und sagittalen Schnittweitenfehler angeben, hergeleitet.

1. HERLEITUNG DER AUSGANGSFORMELN.

Das Objekt wird durch das optische System in eine achsensenkrechte Auffangebene, die in der Nähe der GAUSS'schen Bildebene liegt, abgebildet. (x' , y') sind die kartesischen Koordinaten dieser Auffangebene, E. P. bzw. A. P. sind die Bezeichnungen für

die Eintrittspupille bzw. Austrittspupille des Systems (Abb. 1).

Das betrachtete Objekt nehmen wir als selbstleuchtend an. Kennt man die Helligkeitsverteilung für diesen Fall des hellen Objekts auf dunklem Feld, so

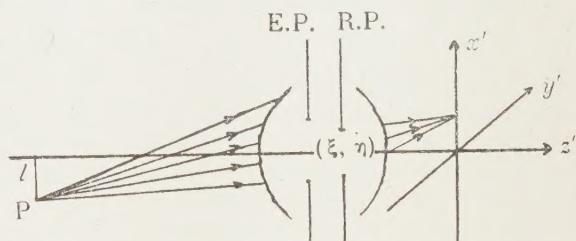


ABB. 1.

kennt man damit auch die Helligkeitsverteilung für den umgekehrten Fall des dunklen Objekts auf hellem Feld, wie er ja in der Photographie auch häufig vorkommt. Wir betrachten zunächst einen einzelnen Punkt P des Objekts. Dann geht von P ein Strahlenbündel aus und davon wird durch das optische System nur das Teilbündel der Strahlen durchgelassen, das zur Abbildung von P beiträgt. Die kartesischen Koordinaten der achsensenkrechten Objektebene bezeichnen wir mit (k , l). Wegen der vorausgesetzten Rotationssymmetrie des Systems brauchen nur Strahlen mit $k = 0$ betrachtet zu werden. Diese Strahlen sind durch 3 Zahlenangaben zu beschreiben, etwa durch die 3 Größen:

l : Abstand des Objektpunktes von der Achse,
(ξ' , η'): Richtungskosinus des Strahls im Bildraum.
Denjenigen Strahl des von P ausgehenden Bündels, der durch die Mitte der A. P. geht, nennen wir den

Hauptstrahl dieses Bündels; seine Richtung im Bildraum bezeichnen wir mit (ξ'_0, η'_0) . Die Abweichung der Richtung irgendeines Strahls von der Richtung des Hauptstrahls bezeichnen wir mit $\eta' - \eta'_0 \equiv \eta$ und $\xi' - \xi'_0 \equiv \xi$. Statt durch l ; ξ, η' können wir die Strahlen des betrachteten Bündels auch durch l ; ξ, η beschreiben. Den idealen Bildort des Punktes P nach der GAUSS'schen Optik wollen wir mit $P'_0 \equiv (x'_0, y'_0)$ bezeichnen. Wenn dann $P' \equiv (x', y')$ der Durchstosspunkt eines Strahls durch die Bildebene ist, hat die Aberration vom idealen Bildort die «meridionale» Komponente: $y' - y'_0 \equiv y$ und die «sagittale» Komponente: $x' - x'_0 \equiv x$.

Die hier angestellten Betrachtungen gelten natürlich für jeden Punkt P des Objekts; und x, y sind dann die Komponenten der Aberration von dem jeweiligen idealen Bildort P'_0 . Die Aberration ist im allgemeinen bei den verschiedenen Strahlen verschieden; d. h. es sind x, y Funktionen von $l; \xi, \eta$:

$$x = X(l; \xi, \eta), \quad y = Y(l; \xi, \eta).$$

Die «Aberrationsfunktionen» X, Y schreiben wir nun als Potenzreihen in den Variablen ξ, η , wobei wir in dieser Arbeit die Entwicklung aber nur bis zu den in ξ, η quadratischen Gliedern treiben, da wir nur mit dieser Beschränkung bei unseren Rechnungen mit elementaren Funktionen auskommen. Wir betrachten also in dieser Arbeit den Fall, dass x und y hinreichend genau durch Aberrationsfunktionen 2. Grades in ξ, η beschrieben werden:

- (1) $y = b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \xi \eta + b_4 \xi + b_5 \xi^2;$
- (2) $x = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \xi \eta + a_4 \xi + a_5 \xi^2.$

Für $\xi = 0, \eta = 0$ muss $x = 0, y = 0$ sein; also muss gelten: $b_0 = a_0 = 0$. Es ist leicht einzusehen, dass infolge der vorausgesetzten Rotationssymmetrie des Systems y eine gerade Funktion in ξ und x eine ungerade Funktion in ξ ist. Daraus folgt: $b_3 = b_4 = 0$, $a_1 = a_2 = a_5 = 0$.

Nach einem Satz der geometrischen Optik, siehe z. B.

M. HERZBERGER [1], gilt fernerhin: $\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \eta}$ woraus folgt: $a_3 = 2 b_5$.

Nun nennen wir: $b_1 = T$, $b_2 = 3K$, $b_5 = R$, $a_4 = S$ und erhalten damit für die angesetzte Aberrationsfunktion:

$$(2) \quad y = T\eta + 3K\eta^2 + R\xi^2; \quad (2a) \quad x = S\xi + 2R\xi\eta.$$

Die auftretenden Koeffizienten: R, S, T, K sind natürlich Funktionen von l , und sie sind je ein Mass für folgende Bildfehler:

T : tangentialer Schnittweitenfehler; K : Koma; S : sagittaler Schnittweitenfehler; R : Rinnenfehler.

Nach der SEIDEL'schen Theorie der Bildfehler 3. Ordnung entwickelt man — was wir aber hier nicht tun — die Größen R, S, T, K auch noch nach Potenzen von l , das als klein angesehen wird, und man berücksichtigt nur Glieder, die in $l; \xi, \eta$ zusammen von höchstens 3. Ordnung sind. Innerhalb dieser Näherung

ist nach SEIDEL $R = K$. Da wir l beliebig lassen und deshalb R und K nicht nach l entwickeln, also auch keine solche Entwicklung abbrechen, ist für uns im allgemeinen R von K verschieden.

Für einen festen Objektpunkt l ordnen wir jedem Strahl ξ, η seinen Durchstosspunkt durch die A. P. zu. Dadurch können wir die Richtungskosinus der Strahlen des betrachteten Bündels näherungsweise auch als kartesische Koordinaten einer (ξ, η) — Ebene deuten, die in der A.P. liegt. Dem Hauptstrahl entspricht dabei der Ursprung der A. P. Den geometrischen Rand der Strahlen können wir aufgrund dieser Zuordnung durch eine Kurve $g(\xi, \eta) = 0$ darstellen. Da wir auch ausseraxiale Objektpunkte ins Auge fassen, bei deren Abbildung die Strahlenbündel durch die Linsenfassung des Objektivs statt durch die Blende begrenzt werden, so ist dieser Rand im allgemeinen ein Zweieck. Indem wir die Ecken abrunden, können wir dieses Zweieck gut als Ellipse

$$(3) \quad \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1$$

annähern (Abb. 2). Durch die Abrundung der Ecken

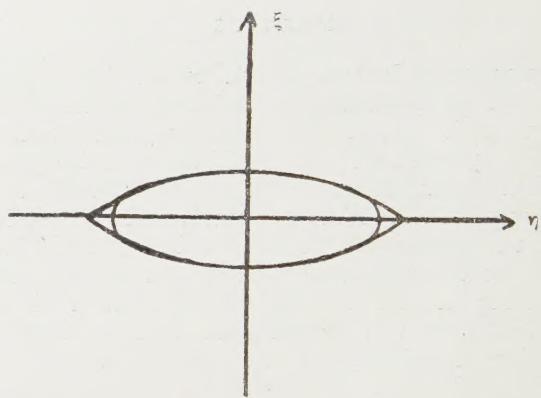


ABB. 2.

wird ein gewisser Fehler gemacht, der aber für unsere anzustellende Betrachtung ohne Bedeutung ist, denn man kann aufgrund der Gestalt der Aberrationskurven, wie sie in der Praxis vorliegen, aussagen, dass die bei der Abrundung verlorengegangenen Strahlen in sehr vielen Fällen wenig zur Helligkeit im Bild beitragen. Da uns einzig aber die Helligkeit interessiert, können diese Strahlen daher vernachlässigt werden. Nach diesen Vorbereitungen können wir unsere Fragestellung präzisieren: wir geben uns die durch das System gelieferte Abbildung vor, d. h. es seien die Aberrationsfunktionen 2. Grades:

$$y = T\eta + 3K\eta^2 + R\xi^2; \quad x = S\xi + 2R\xi\eta$$

bekannte Funktionen (also die Bildfehler: R, S, T, K seien bekannt), und wir fragen danach: wie lautet die Helligkeitsverteilung des Bildes in der Auffangebene?

Über die Gestalt des abzubildenden Objekts haben wir noch keine Voraussetzungen getroffen. Die Helligkeitsverteilung im Bild eines photographischen Objekts

kann man angeben, wenn man weiß, wie die Helligkeit im Bild der einzelnen Elemente des photographischen Objekts verteilt ist. Solche Elemente eines photographischen Objekts sind beispielsweise: der Punkt, das Linienstückchen und der Rand eines Flächenstückchens. Die Helligkeit im Bild eines Punktes: J wird nach E. DURAND [2] durch den Ausdruck:

$J = J_0 \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$ gegeben, wobei $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$ die zur Abbildung $x = X(\xi, \eta)$, $y = Y(\xi, \eta)$ gehörende Funktionaldeterminante ist, und J_0 einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet. Dabei kommt keine Integration vor. — Die Berechnung der Helligkeit im Bild eines Linienstückchens erfordert eine Integration, die sich nur bei speziellen Aberrationsfunktionen noch durchführen lässt. Dazu gehört die dieser Arbeit zu Grunde gelegte Aberrationsfunktion 2. Grades in den Pupillenkoordinaten mit den Größen: R , S , T , K als Koeffizienten; die Integration führt in diesem Fall auf elementare Funktionen. Behandelt man den nächst schwierigeren Fall der Aberrationsfunktion 3. Grades in den Pupillenkoordinaten, so führt die Integration auf elliptische Integrale 1. Gattung (*). — Die Berechnung der Helligkeit im Bild des Randes eines Flächenstückchens erfordert noch eine weitere Integration.

Als Objekt soll nun ein Linienstückchen betrachtet werden, das in einer achsen senkrechten Ebene, der Objektebene, liegt. Über die Länge des Linienstückchens setzen wir dabei voraus, dass diese so klein ist, dass die Koeffizienten: $R(l)$, $S(l)$, $T(l)$, $K(l)$ für die verschiedenen l des Linienstückchens praktisch konstant sind. Das Linienstückchen soll aber keine differentiell kleine Größe sein, sondern die Länge seines Bildes soll gross sein gegenüber den Aberrationen x , y . Greifen wir einen Punkt P des Linienstückchens und einen bestimmten Strahl mit den Pupillenkoordinaten ξ , η heraus, und ist P'_0 das ideale Bild von P , dann gibt uns x , y die Aberration dieses Strahls vom idealen Bildpunkt P'_0 an. Die Aberrationsfunktionen x , y haben bei gleichen Pupillenkoordinaten ξ , η für alle verschiedenen Objektpunktkoordinaten l des Linienstückchens die gleichen Werte, wegen der Konstanz der Koeffizienten R , S , T , K . Jeder Punkt des Linienstückchens wird also durch die Strahlen mit jeweils gleichen Pupillenkoordinaten ξ , η mit der gleichen Aberration abgebildet; das ganze Linienstückchen wird dabei wieder in ein Linienstückchen abgebildet, das zu dem idealen Bild parallel ist.

Bezüglich der Orientierung des Linienstückchens in der Objektebene beschränken wir uns auf die beiden wesentlichsten Fälle, dass es entweder auf einer den Achsenpunkt der Objektebene enthaltenden Geraden liegt (« sagittales Lilienstückchen »), oder dass es eine solche Gerade rechtwinklig schneidet (« meridionales Linienstückchen »).

1) **Meridionales Linienstückchen**: Da das meridionale Linienstückchen durch die Pupillenkoordinaten

(*) Hierüber wird in einer späteren Mitteilung berichtet, werden.

ξ , η wieder in ein meridionales Linienstückchen abgebildet wird, das einen bestimmten Abstand y vom idealen Bild hat (Abb. 3), ist für die Abbildung dieses

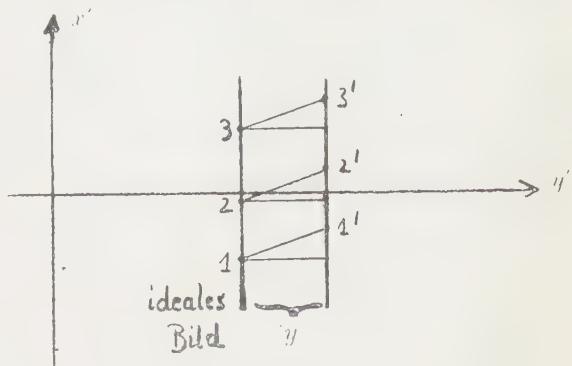


ABB. 3.

meridionalen Linienstückchens, wenn wir von der Umgebung seiner beiden Enden absehen, nur die y -Komponente der Aberration von Bedeutung; die x -Werte verschieben die Linie nur in sich. Diese Betrachtung gilt für die Abbildung durch jedes ξ , η . Die Größe der x -Werte ist für die Helligkeit im Bild daher ohne Belang; die Helligkeit ist eine Funktion von y allein. Für die weitere Behandlung benutzen wir die näherungsweise gültige Annahme, dass in der A. P. die Helligkeit (d. i. die Flächendichte der dort strömenden Lichtenergie) konstant ist, dass die durch ein Element $d\xi d\eta$ der A. P. strömende Energie also proportional $d\xi d\eta$ ist. Wir betrachten in der (x', y) — Ebene einen zur x' — Achse parallelen, geraden Streifen der Breite dy (Abb. 4); die beiden den Streifen

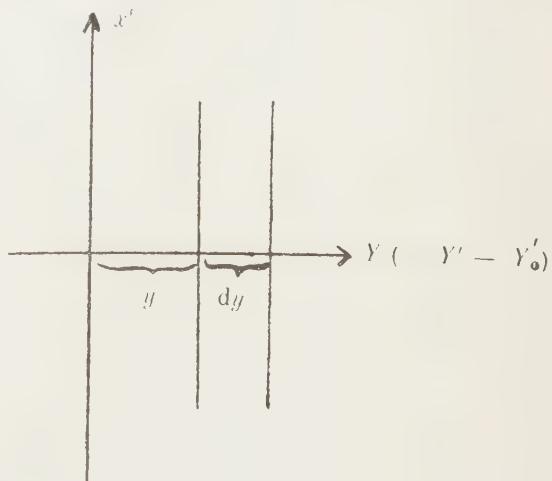


ABB. 4.

begrenzenden Geraden haben die Abstände y und $y + dy$ von der x' — Achse. Die Helligkeit in diesem Streifen ist proportional der auf den Streifen fallenden Lichtenergie dE und umgekehrt proportional der Streifenbreite dy , also $\mathcal{H} \sim \frac{dE}{dy}$. Die Strahlen mit der

meridionalen Aberration y treffen die A. P. auf einer durch Gleichung (2) bestimmten Kurve $[y]$, die Strahlen mit der meridionalen Aberration $y + dy$ treffen die A. P. auf einer benachbarten Kurve $[y + dy]$, die durch Gleichung (2) bestimmt ist, wenn man dort y durch $y + dy$ ersetzt. Bezeichnen wir den von diesen beiden benachbarten Kurven mit dem Rand der Ellipse gebildeten Flächeninhalt mit dF (Abb. 5), so ist $dE \sim dF$, folglich $\mathcal{H} \sim \frac{dF}{dy}$. Es interessiert uns nur die relative Helligkeit, die wir mit $H(y)$ bezeichnen wollen

$$(4) \quad H(y) = \frac{dF}{dy}.$$

Für dF können wir aber schreiben (siehe Abb. 5) wenn wir entweder über ξ oder über η integrieren

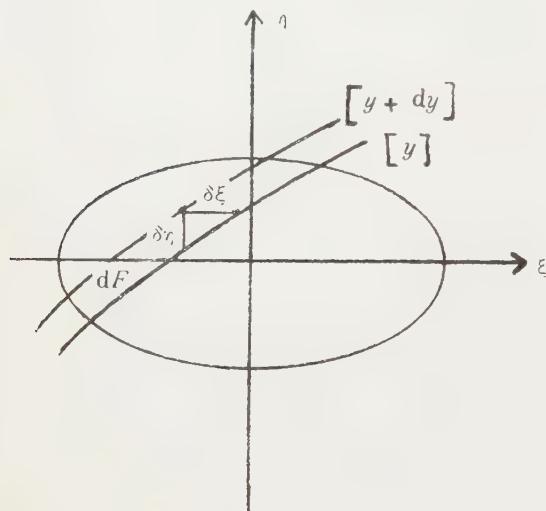


ABB. 5.

$$dF = \int \delta\eta \, d\xi = - \int \delta\xi \, d\eta$$

und es ist

$$(5) \quad \delta\eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_\xi dy; \quad \delta\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_\eta dy.$$

Für H ergibt sich also nach (4) :

$$(6) \quad H(y) = \int \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_\xi d\xi = - \int \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_\eta d\eta.$$

2) Sagittales Liniensegment: Beim sagittalen Liniensegment ist die Helligkeit nur eine Funktion von x , denn die y -Werte verschieben, von den beiden Enden des Liniensegments abgesehen, die Linie nur in sich. Wir betrachten in der A. P. (Abb. 6) die beiden Kurven $[x]$ und $[x + dx]$, die gemäß Gleichung (2a) von den Strahlen mit der sagittalen Aberration x bzw. $x + dx$ getroffen werden. Bezeichnen wir mit $d\bar{F}$ den Flächeninhalt, der von diesen beiden Kurven und dem Rand der A. P. begrenzt wird, so ist Helligkeit $\bar{\mathcal{H}}$

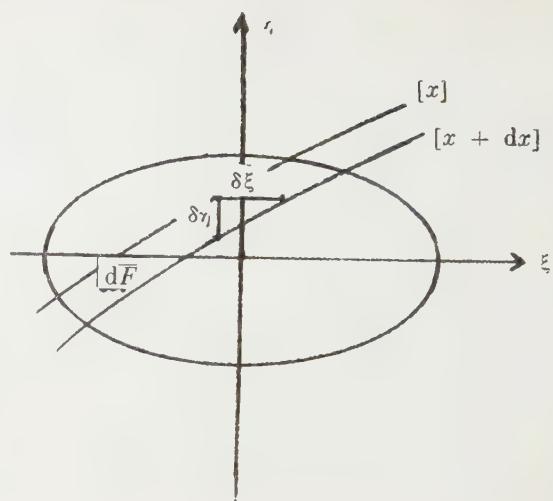


ABB. 6.

die die Strahlen mit einer sagittalen Aberration zwischen x und $x + dx$ in diesem Streifen hervorrufen :

$\bar{\mathcal{H}} \sim \frac{d\bar{F}}{dx}$. Wir interessieren uns nur für die relative, Helligkeit $\bar{H}(x)$:

$$(4 a) \quad \bar{H}(x) = \frac{d\bar{F}}{dx}.$$

Nun kann man für $d\bar{F}$ aber schreiben (siehe Abb. 6)

$$d\bar{F} = - \int \delta\eta \, d\xi = \int \delta\xi \, d\eta \quad \text{und analog (5) gilt}$$

$$(5 a) \quad \delta\eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_\xi dx; \quad \delta\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\eta dx.$$

Daher ergibt sich nach (4 a) für $\bar{H}(x)$:

$$(6 a) \quad \bar{H}(x) = - \int \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_\xi d\xi = \int \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\eta d\eta.$$

2. VORSCHRIFT ZUR BERECHNUNG DER HELIGKEIT.

Vorbetrachtungen: Um die Helligkeit H bzw. \bar{H} , die durch die bestimmten Integrale (6) bzw. (6 a) gegeben wird, berechnen zu können, hat man die Integrationsgrenzen — das sind die Schnittpunkte der durch (2) bzw. (2 a) gegebenen Kurven $[y]$ bzw. $[x]$ mit dem Rand (3) der Ellipse — auszurechnen. Die explizite Berechnung der Integrationsgrenzen kann jedoch Schwierigkeiten machen. Solche Schwierigkeiten treten auf, wenn man die Integrationsgrenzen im Fall des sagittalen Liniensegments unter Zugrundelegung der Aberrationsfunktionen 2. Grades (2 a) berechnen will, denn hieraus und aus (3) ergeben sich die Integrationsgrenzen als Wurzeln von allgemeinen Gleichungen 4. Grades. Diese Gleichungen 4. Grades sind im Prinzip wohl zu lösen; jedoch sind die Wurzeln, die in voller Allgemeinität benötigt werden, solch komplizierte Ausdrücke, dass man sie nicht benutzen könnte, um damit eine praktische Vorschrift zur Berech-

chnung der Helligkeit aufzustellen. Bei der Vorschrift, die hier mitgeteilt wird, umgeht man diese Schwierigkeiten, indem man nicht bei vorgegebenem y bzw. x die Integrationsgrenzen ausrechnet, sondern indem man (***) die Integrationsgrenzen als Parameter zur Darstellung der Kurven für die Helligkeitsverteilung vorgibt.

Die im folgenden aufzustellende Vorschrift gilt für die Berechnung der Helligkeit im Bild eines meridionalen und eines sagittalen Liniensegmentes. Die Vorschrift wird zwar nur für das meridionale Liniensegment formuliert werden, für das sagittale Liniensegment lautet sie jedoch analog. Fernerhin ist die Vorschrift, die angegeben wird, unabhängig von der in dieser Arbeit vorgenommenen Beschränkung auf Aberrationsfunktionen 2. Grades in den Pupillenvariablen; sie kann also im Prinzip zur Berechnung der Helligkeit im Bild eines (meridionalen oder sagittalen) Liniensegments unter Zugrundelegung beliebiger Aberrationsfunktionen benutzt werden.

Nur für den Fall, dass die betrachteten Kurven $[y]$ nicht ganz außerhalb der Ellipse liegen, geht Licht durch das System, ist also Helligkeit vorhanden. Die Vorschrift zur Berechnung der Helligkeit beschränkt sich darauf, dass dieser Fall vorliegt. Für die anzugebende Vorschrift ist es von Bedeutung, ob die Kurven $[y]$ dann ganz innerhalb der Ellipse liegen, oder ob sie mit dem Rand der Ellipse Schnittpunkte besitzen. Wir wollen diese beiden Hauptfälle mit I, II bezeichnen. Man kann sie wie folgt unterscheiden:

Anstelle der Pupillenvariablen ξ, η führen wir Variable r, φ ein durch:

$$\xi = r \cdot \alpha \cdot \cos \varphi; \quad \eta = r \cdot \beta \cdot \sin \varphi \quad (\alpha, \beta : \text{Pupillenachsen}).$$

Damit geht die Aberrationsgleichung: $y = Y(\xi, \eta)$ über in eine Beziehung: $y = y(r, \varphi)$. Gibt es nun gemäß $y = y(r, \varphi)$ zu allen φ des Intervalls $0 \leq \varphi < 2\pi$ nur reelle r -Werte, die im Intervall $0 \leq r \leq 1$ liegen, dann hat man Hauptfall I vor sich; kann man jedoch zwei solche φ -Werte angeben: φ_1, φ_2 , dass die zugehörigen r -Werte: r_1, r_2 reell sind und die Ungleichungen erfüllen: $r_1 < 1, r_2 < 1$, dann hat man Hauptfall II vor sich. Die Helligkeit H berechnet sich in den beiden Hauptfällen I, II dann wie folgt:

Hauptfall I: die Kurve $[y]$ liegt ganz innerhalb der Ellipse.

Dann ist: $H = -\oint \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_\eta d\eta = \oint \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_\xi d\xi$, wobei

das Umlaufintegral längs der geschlossenen Kurve $[y]$ zu nehmen ist.

Hauptfall II: die Kurve $[y]$ hat mit dem Rand der Ellipse Schnittpunkte. In diesem Fall führen wir eine neue Variable u ein durch:

$$(7) \quad u \equiv -\int \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_\eta d\eta \quad \text{oder} \quad (7a) \quad u \equiv \int \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_\xi d\xi;$$

dabei ist das Integral (7) bzw. (7a) unbestimmt zu integrieren. Die Helligkeit H ist das zu (7) bzw. (7a) gehörende bestimmte Integral, mit den Koordinaten der Schnittpunkte als Integrationsgrenzen. In dem Integrand von (7) bzw. (7a) ist für $\xi = \xi(y, \eta)$ bzw. $\eta = \eta(y, \xi)$ diejenige Funktion einzusetzen, die man durch Auflösung der Aberrationsgleichung $y = Y(\xi, \eta)$ nach ξ bzw. η erhält. Ob man u durch (7) oder (7a) definiert, hängt ganz davon ab, ob man die Gleichung $y = Y(\xi, \eta)$ leichter nach ξ oder η auflösen kann (wenn überhaupt), und davon, ob die Integration in (7) oder in (7a) leichter auszuführen ist (wenn überhaupt). Für die weitere Betrachtung wollen wir annehmen, dass u durch (7) definiert worden ist; im anderen Fall verlaufen die folgenden Betrachtungen analog.

Das unbestimmte Integral u ist eine Funktion von y und η : $u = U(y, \eta)$. Das bestimmte Integral H ist (wenn die Kurve $[y]$ beispielsweise zwei Schnittpunkte Nr. 1 und 2 mit dem Rand der Ellipse hat) gleich: $H = U(y_1, \eta_2) - U(y_1, \eta_1)$; dabei sind η_1 und η_2 die η -Koordinaten der beiden Schnittpunkte, die Kurve (2) mit dem Rand (3) bildet. Man hätte also die Gleichungen (2) und (3) nach ξ und η aufzulösen — das würde ξ und η als Funktionen von y liefern, und man hätte $\eta = \eta(y)$ in $u = U(y, \eta)$ einzusetzen — dies würde u als Funktion von y liefern; bei zwei Schnittpunkten wäre die Lösung η zweideutig und damit auch u bei vorgegebenem y ; und man hätte schliesslich die Differenz zwischen den zwei erhaltenen u -Werten zu bilden — das wäre dann die gesuchte Helligkeit als Funktion von y . Wir gehen aber, wie am Anfang dieses § gesagt, anders vor. Wir geben η als Parameter vor ($-\beta \leq \eta \leq +\beta$), rechnen zunächst aus (3) ξ aus: $\xi = \xi(\eta)$ und setzen dies in (2) ein:

$$y = Y(\xi(\eta), \eta) = y(\eta).$$

Dies geht immer durchzuführen. Das so erhaltene $y = y(\eta)$ setzen wir dann in $u = U(y, \eta)$ ein: $u = U(y(\eta), \eta) = u(\eta)$ und haben somit in Parameterdarstellung die Kurve gefunden:

$$(8) \quad u = u(\eta); \quad y = y(\eta).$$

Auch die zuletzt angegebene Umformung ist ohne Schwierigkeiten durchzuführen, da dazu keine Gleichungen aufzulösen sind. Die so erhaltene Kurve (8) gibt uns die zu jedem y -Wert gehörenden u -Werte an. In dem als Beispiel angenommenen Fall von zwei Schnittpunkten erhalten wir zu jedem y -Wert zwei u -Werte, und deren Differenz ist die gesuchte Helligkeit H in y . Diese Differenz ist nach Auftragung der Kurve (8) unmittelbar gegeben durch die Strecke zwischen den beiden zu y gehörigen Kurvenpunkten.

Gehören zu einem y -Wert nicht 2, sondern 4 Schnittpunkte der Kurve $[y]$ mit dem Rand der Ellipse, besteht also die Kurve $[y]$ innerhalb der Ellipse aus zwei getrennten Stücken, so hat die Kurve (8) bei diesem y -Wert vier Punkte (mit verschiedenen u -Werten), die paarweise den getrennten Stücken der Kurve $[y]$ zugeordnet sind. Die Summe aus der Strecke zwischen

***) Nach einem Vorschlag von P. SINDEL.

dem einen Paar dieser Punkte und der Strecke zwischen dem anderen Paar dieser Punkte stellt dann die Helligkeit H in y dar. — Entsprechendes gilt für 6 und mehr Schnittpunkte.

Die Helligkeit wird also aus einem oder mehreren Paaren krummer Kurven abgelesen, nicht (wie bei Kurvendarstellungen üblich) aus einem Kurvenpaar, das aus einer krummen Kurve und einer Geraden, nämlich der Abszissen, besteht. Ein solches Paar krummer Kurven kann auch eine zusammenhängende Kurve bilden, die auch geschlossen sein kann.

3. ANWENDUNG AUF DEN MERDIONALEN FALL.

Hauptfallunterscheidung : Da wir eine Aberrationsfunktion 2. Grades zu Grunde legen, nämlich die Gleichung (2) : $y = T\eta + 3K\eta^2 + R\zeta^2$, sind die Kurven $[y]$ Kegelschnitte. Unter Ausnutzung einiger bekannter Eigenschaften der Kegelschnitte können wir in diesem Fall die Fallunterscheidung I, II direkt durchführen, ohne dazu das in § 2 angegebene Kriterium benutzen zu müssen.

Der einzige Kegelschnitt, der ganz im Endlichen verläuft, ist die Ellipse. (2) stellt aber nur dann Ellipsen dar, wenn $\operatorname{sgn} R = \operatorname{sgn} K$ ist. Dies setzen wir zunächst voraus. Dann ist (2) die Gleichung einer Ellipsenschar mit dem Parameter y , die wir auch in der Form schreiben können :

$$(2*) \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\left(\eta + \frac{T}{6K}\right)^2}{b^2} = 1; \\ a^2 = \frac{y + \frac{T^2}{12K}}{R}, \quad b^2 = \frac{y + \frac{T^2}{12K}}{3K}.$$

a und b sind die Achsen der Ellipsen. Der Mittelpunkt der Ellipsenschar ist der Punkt $(0, -\frac{T}{6K})$; er

wird auch von (2) dargestellt, und zwar für $y = -\frac{T^2}{12K}$.

Damit Ellipsen der Schar (2*) ganz in der Ellipse (3) liegen, ist notwendig, dass der Mittelpunkt der Ellipsenschar : $(0, -\frac{T}{6K})$ in der Ellipse liegt, also :

$$-\beta \leq -\frac{T}{6K} \leq \beta$$

ist. Gilt dies, so liegen von $y = -\frac{T^2}{12K}$ an alle Ellipsen der Schar bis zu einem Wert y_e ganz in der A.P. Es zeigt sich später, dass dieser Wert y_e garnicht ausgerechnet zu werden braucht.

Wir haben also im

Hauptfall I : $\operatorname{sgn} R = \operatorname{sgn} K$; $-\beta \leq -\frac{T}{6K} \leq \beta$;

y zwischen $-\frac{T^2}{12K}$ und y_e . Um die Helligkeit für diesen Fall zu berechnen, gehen wir am besten aus von

$$(4) : H = \frac{dF}{dy}.$$

Hierbei können wir unter F den Flächeninhalt der Ellipse $[y]$ verstehen (Abb. 7). Nach (2*) ist

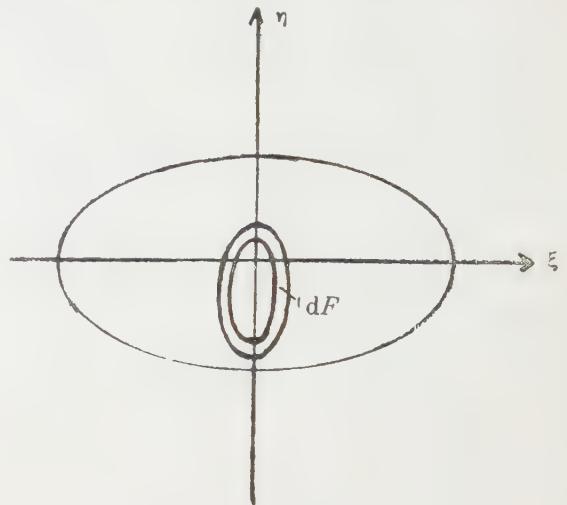


ABB. 7.

$$F = \pi a b = \frac{\pi}{\sqrt{3KR}} \left(y + \frac{T^2}{12K} \right), \text{ folglich}$$

$$dF = \frac{\pi}{\sqrt{3KR}} dy,$$

nach (4) also :

$$H = \frac{\pi}{\sqrt{3KR}}.$$

Die Helligkeit H ist in diesem Fall also eine Konstante. Für diejenigen y , die über y_e hinausgehen, geschieht die Berechnung der Helligkeit nach der Vorschrift von Hauptfall II, da dann die Ellipsen $[y]$ Schnittpunkte mit dem Rand der Ellipse (3) haben. Um die hier im Hauptfall I erhaltene Helligkeit der für den Hauptfall II gültigen Vorschrift anzupassen, schreiben wir sie in der Form $H = u_2 - u_1$ mit $u_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3KR}}$,

$u_1 = -\frac{\pi}{2\sqrt{3KR}}$. Diese beiden Werte u_1 und u_2 werden

nämlich auch von dem Teil der Kurve, der nach der Vorschrift des Hauptfalles II zu errechnen ist, an der Stelle $y = y_e$ angenommen.

Hauptfall II : Wenn $R \neq 0$ ist, führen wir die Variable u durch (7) ein.

$$\text{Nach (2) ist : } \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{R(y - T\eta - 3K\eta^2)}}.$$

Die Variable u ist also das unbestimmte Integral :

$$(9) \quad u = -\int \frac{1}{2\sqrt{R(y - T\eta - 3K\eta^2)}} dy$$

(die Integration ist bei konstantem y durchzuführen). Für den Fall, dass $R = 0$ ist, definieren wir u durch (7 a). Nach (2) ist :

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{T + 6K\eta}, \text{ daher: } (10) \quad u = \int \frac{d\xi}{T + 6K\eta}.$$

Zunächst soll jedoch $R \neq 0$ vorausgesetzt werden. Dann ist das Integral (9) auszuwerten, wobei zu beachten ist, dass R alle endlichen Werte ungleich Null und T, K alle endlichen Werte annehmen können.

Fall A: $\operatorname{sgn} R = \operatorname{sgn} K; \quad R \neq 0, \quad K \neq 0.$

Wie schon erwähnt, sind die Kurven $[y]$ Ellipsen. Ist $R < 0, K < 0$, dann ist der Mittelpunkt der Ellipsenschar der Punkt $(0, \frac{T}{6|K|})$ und die Achsen sind gegeben durch:

$$a^2 = -\frac{y}{|R|} + \frac{T^2}{12|K||R|}, \quad b^2 = -\frac{y}{3|K|} + \frac{T^2}{36K^2}.$$

Diese Achsen erhält man aber auch im Fall $R > 0, K > 0$, wenn man y durch $-y$ ersetzt. Nur der Mittelpunkt der Ellipsenschar im Fall $R > 0, K > 0$ und derjenige im Fall $R < 0, K < 0$ liegen spiegelbildlich zur ξ -Achse, wenn beidemal die Werte von T und $|K|$ dieselben sind. Dies ist aber für dF , also auch für H , bedeutungslos, so dass wir feststellen können: Eine gleichzeitige Vorzeichenänderung von R, K bewirkt eine Spiegelung der Helligkeitskurven (u, y) an der u -Achse. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit des Falles A kann daher: $R > 0, K > 0$ angenommen werden.

In diesem Fall wird aus (9):

$$(9a) \quad u = \frac{1}{2\sqrt{3KR}} \arccos \frac{\eta + \frac{T}{6K}}{\sqrt{\frac{y}{3K} + \left(\frac{T}{6K}\right)^2}}.$$

Zur Parameterdarstellung (8) der Kurve (u, y) müssen wir jetzt noch y durch η ausdrücken:

$$(9b) \quad y = T\eta + 3K\eta^2 + R\xi^2; \quad \xi^2 = \frac{x^2}{\beta^2} (\beta^2 - \eta^2).$$

Um die so gewonnene Parameterdarstellung übersichtlicher zu machen, führen wir neue Variable ein:

$$(11) \quad \varrho \equiv 2\sqrt{3KR}u, \quad \mathbf{y} \equiv \frac{y}{3K\beta^2} + \left(\frac{T}{6K\beta}\right)^2, \\ \bar{\eta} = \frac{\eta}{\beta}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{\alpha}.$$

Hat man die Kurve (ϱ, \mathbf{y}) bestimmt, so braucht man diese nur in einem anderen Maßstab darzustellen, um daraus die Kurve (u, y) zu erhalten. Wir führen noch die Abkürzungen ein: $\mu = \frac{T}{6K\beta}$, $\nu = \frac{R\alpha^2}{6K\beta^2}$ und erhalten somit für die Parameterdarstellung (9a, b) in den Variablen (11):

$$(9a) \quad \varrho = \arccos \frac{\bar{\eta} + \mu}{\sqrt{(\bar{\eta} + \mu)^2 + 2\nu\bar{\xi}^2}}; \\ y = (\bar{\eta} + \mu)^2 + 2\nu\bar{\xi}^2; \quad \bar{\xi}^2 = 1 - \bar{\eta}^2.$$

Der Parameter $\bar{\eta}$ durchläuft den Wertebereich $-1 \leq \bar{\eta} \leq 1$.

Fall B: $\operatorname{sgn} R \neq \operatorname{sgn} K; \quad R \neq 0, \quad K \neq 0.$

Die Kurven $[y]$ sind nun Hyperbeln. Durch eine Betrachtung wie im Fall A für die Ellipsen, kann man im Fall B für die Hyperbeln zeigen, dass man ohne Einschränkung der Allgemeinheit: $R < 0, K > 0$ annehmen kann; eine gleichzeitige Vorzeichenänderung von R, K bewirkt nur eine Spiegelung der Helligkeitskurve (u, y) an der u -Achse. Im Fall $R < 0, K > 0$, den wir für das Weitere annehmen, erhalten wir aus (9):

$$(9c) \quad u = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3KR}} \operatorname{Ar Sin} \frac{\eta + \frac{T}{6K}}{\sqrt{\frac{y}{3K} + \left(\frac{T}{6K}\right)^2}} & \text{für } y \leq -\frac{T^2}{12K}, \\ -\frac{1}{2\sqrt{3KR}} \operatorname{Ar Cos} \frac{\left|\eta + \frac{T}{6K}\right|}{\sqrt{\frac{y}{3K} + \left(\frac{T}{6K}\right)^2}} & \text{für } y \geq -\frac{T^2}{12K}. \end{cases}$$

Zur Parameterdarstellung (8) der Kurve (u, y) brauchen wir noch:

$$(9d) \quad y = T\eta + 3K\eta^2 - |R|\xi^2; \quad \xi^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} (\beta^2 - \eta^2).$$

Wir führen neben den Variablen (11) noch die Variable w ein durch:

$$(12) \quad w = -2\sqrt{3KR}u$$

und erhalten für die Parameterdarstellung der Kurve (9c, d) in den Variablen (11), (12):

$$(9c) \quad w = \begin{cases} \operatorname{Ar Sin} \frac{\bar{\eta} + \mu}{\sqrt{(\bar{\eta} + \mu)^2 + 2\nu\bar{\xi}^2}} & \text{für } \mathcal{Y} \leq 0; \\ \mathcal{Y} = (\bar{\eta} + \mu)^2 + 2\nu\bar{\xi}^2; \quad \bar{\xi}^2 = 1 - \bar{\eta}^2. \\ \operatorname{Ar Cos} \frac{|\bar{\eta} + \mu|}{\sqrt{(\bar{\eta} + \mu)^2 + 2\nu\bar{\xi}^2}} & \text{für } \mathcal{Y} \geq 0; \\ \mathcal{Y} = (\bar{\eta} + \mu)^2 + 2\nu\bar{\xi}^2; \quad \bar{\xi}^2 = 1 - \bar{\eta}^2. \end{cases}$$

Der Parameter $\bar{\eta}$ durchläuft den Wertebereich: $-1 \leq \bar{\eta} \leq 1$.

Fall C: $K = 0; \quad R \neq 0, \quad T \neq 0.$

Aus (9) erhalten wir: $u = -\frac{1}{T} \pm \sqrt{-\frac{T}{R}\eta + \frac{y}{R}}$.

Wir wählen in diesem Fall zweckmäßig ξ als Parameter ($-\alpha \leq \xi \leq +\alpha$) und erhalten als Parameterdarstellung der Kurve (u, y) :

$$(9e) \quad u = \frac{1}{T} \pm \xi; \quad y = T\eta + R\xi^2; \quad \eta = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}.$$

Fall D : $K = 0, \quad T = 0, \quad R \neq 0.$

Aus (9) ergibt sich: $u = \pm \frac{\eta}{2\sqrt{Ry}}$. Wir wählen ξ als

Parameter ($-\alpha \leq \xi \leq +\alpha$) und erhalten als Parameterdarstellung der Kurve (u, y) :

$$(9f) \quad u = \pm \frac{\eta}{2R\xi}; \quad y = R\xi^2; \quad \eta = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}.$$

Fall E : $R = 0; \quad (K, T) \neq (0, 0)$

In diesem Fall ist (10) auszuwerten, und wir erhalten als Parameterdarstellung der Kurve (u, y) mit η als Parameter ($-\beta \leq \eta \leq +\beta$):

$$(10a) \quad u = \pm \frac{\xi}{T + 6K\eta}; \quad y = T\eta + 3K\eta^2;$$

$$\xi = \pm \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\beta^2 - \eta^2}.$$

Damit sind wir in der Lage, die Helligkeitsverteilung im Bild eines meridionalen Linienstückchens bei beliebig vorgegebenen Daten zu ermitteln.

4. ANWENDUNG AUF DEN SAGITTALEN FALL.

Hauptfallunterscheidung : Die Kurven $[x]$ sind nach Gleichung (2 a): $x = S\xi + 2R\xi\eta$ Kegelschnitte; und zwar sind es Hyperbeln, wenn $R \neq 0$ ist, und Geraden, wenn $R = 0$ ist. Es kann daher keine Kurve $[x]$ geben, die ganz in der Ellipse (3) liegt. Der

Hauptfall I : kommt also nicht vor.

Hauptfall II : wenn $R \neq 0$ ist, definieren wir u durch $-\int \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{\xi} d\xi$ und wenn $R = 0$ ist, durch

$$\int \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{\eta} d\eta.$$

Fall A : $R \neq 0; \quad S$ beliebig.

Nach (2a) ist $\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{\xi} = \frac{1}{2R\xi}$ und wir erhalten:

$$u = \begin{cases} -\frac{1}{2R} \ln \xi & \text{für } \xi > 0, \\ -\frac{1}{2R} \ln |\xi| & \text{für } \xi \leq 0. \end{cases}$$

Wir führen nun anstelle von u, x neue Variable s, r ein:

$$(13) \quad s = -2R u, \quad r = \frac{x}{2R}$$

und erhalten als Parameterdarstellung der Kurve (s, r) mit ξ als Parameter ($-\alpha \leq \xi \leq +\alpha$):

$$(14) \quad s = \begin{cases} \ln \xi & \text{für } \xi \geq 0, \\ -\ln |\xi| & \text{für } \xi \leq 0 \end{cases};$$

$$r = \xi \left(\frac{S}{2R} \pm \eta \right); \quad \eta = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}.$$

Aus der Kurve (s, r) erhält man durch Maßstabsänderung die Kurve (u, x) .

Fall B : $R = 0; \quad S \neq 0.$

Nach (2 a) ist $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{S}$, und wir erhalten: $u = \frac{\eta}{S}$.

Die gesuchte Parameterdarstellung der Kurve (u, x) , mit η als Parameter ($-\beta \leq \eta \leq +\beta$), lautet also:

$$(15) \quad u = \frac{\eta}{S}; \quad x = S\xi; \quad \xi = \pm \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\alpha^2 - \eta^2}.$$

Damit sind alle beim sagittalen Linienstückchen vorkommenden Fälle behandelt.

5. UBERSICHT UBER DIE MOGLICHEN HELIGKEITSVERTEILUNGEN.

a) **Meridionales Linienstückchen :** Aus der Aberrationsfunktion (2):

$y = T\eta + 3K\eta^2 + R\xi^2$, die wir mit Hilfe der Bezeichnungen:

$$\rho \equiv \alpha \cdot R; \quad \tau \equiv \beta T; \quad \kappa \equiv \beta^2 K$$

auf die reduzierten Pupillenkoordinaten $\bar{\xi} \equiv \xi/\alpha$ und $\bar{\eta} \equiv \eta/\beta$ umschreiben wollen:

$$y = \tau \bar{\eta} + 3 \kappa \bar{\eta}^2 + \rho \bar{\xi}^2$$

folgt für die Meridianstrahlen $\bar{\xi} = 0$:

$$y_{\text{mer}} = \tau \bar{\eta} + 3 \kappa \bar{\eta}^2.$$

Trägt man diese Aberrationskurve ($y_{\text{mer}}, \bar{\eta}$) auf, so kann man an ihrem Steigungsmass bei $\bar{\eta} = 0$ den tangentialem Schnittweitenfehler τ und an ihrer Krümmung die Koma κ erkennen. Nicht aber erkennt man an ihr den Rinnenfehler ρ . Diesen

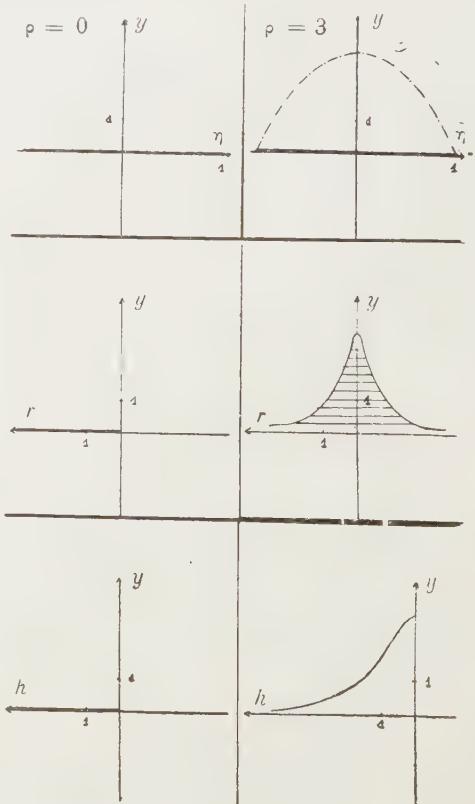


ABB. 8.

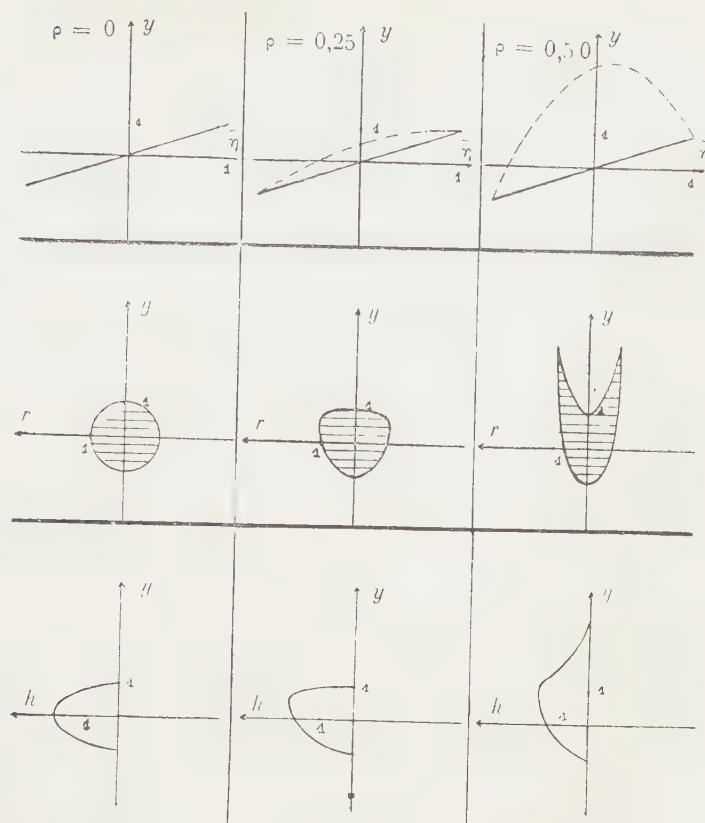


ABB. 9.

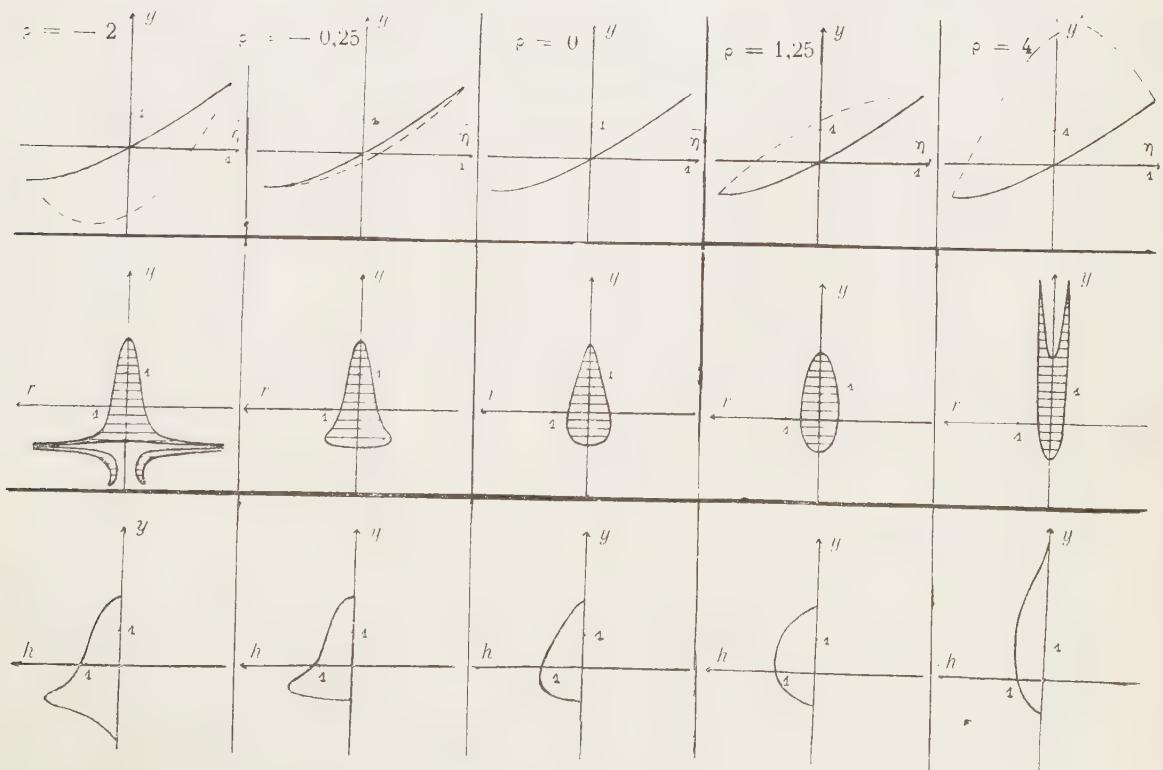


ABB. 10.

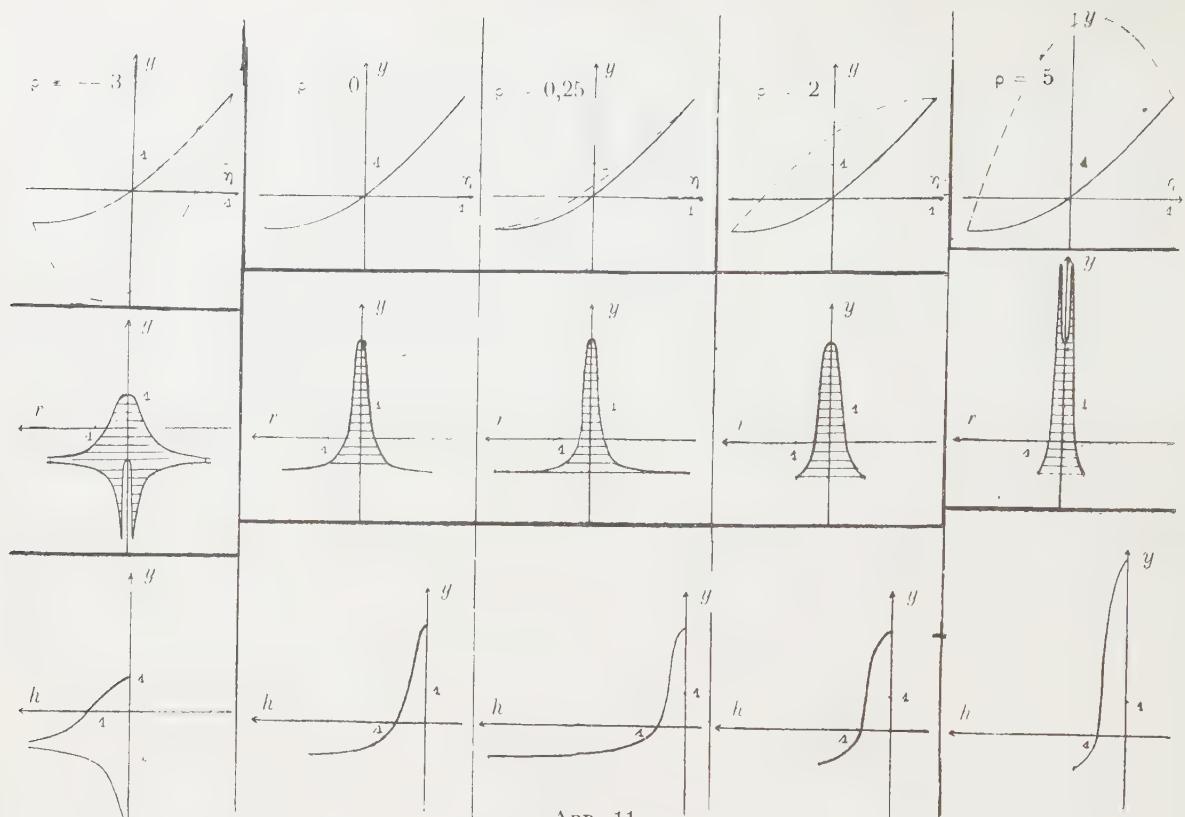


ABB. 11.

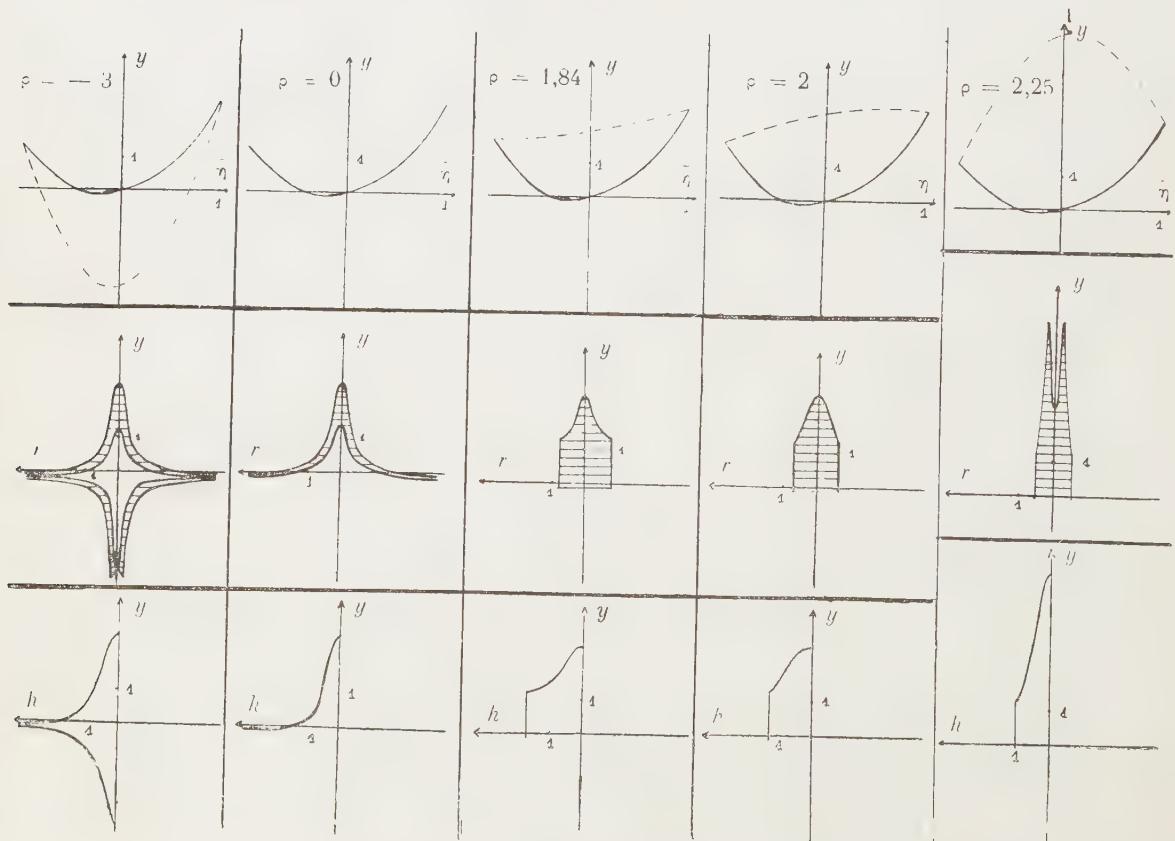


ABB. 12.

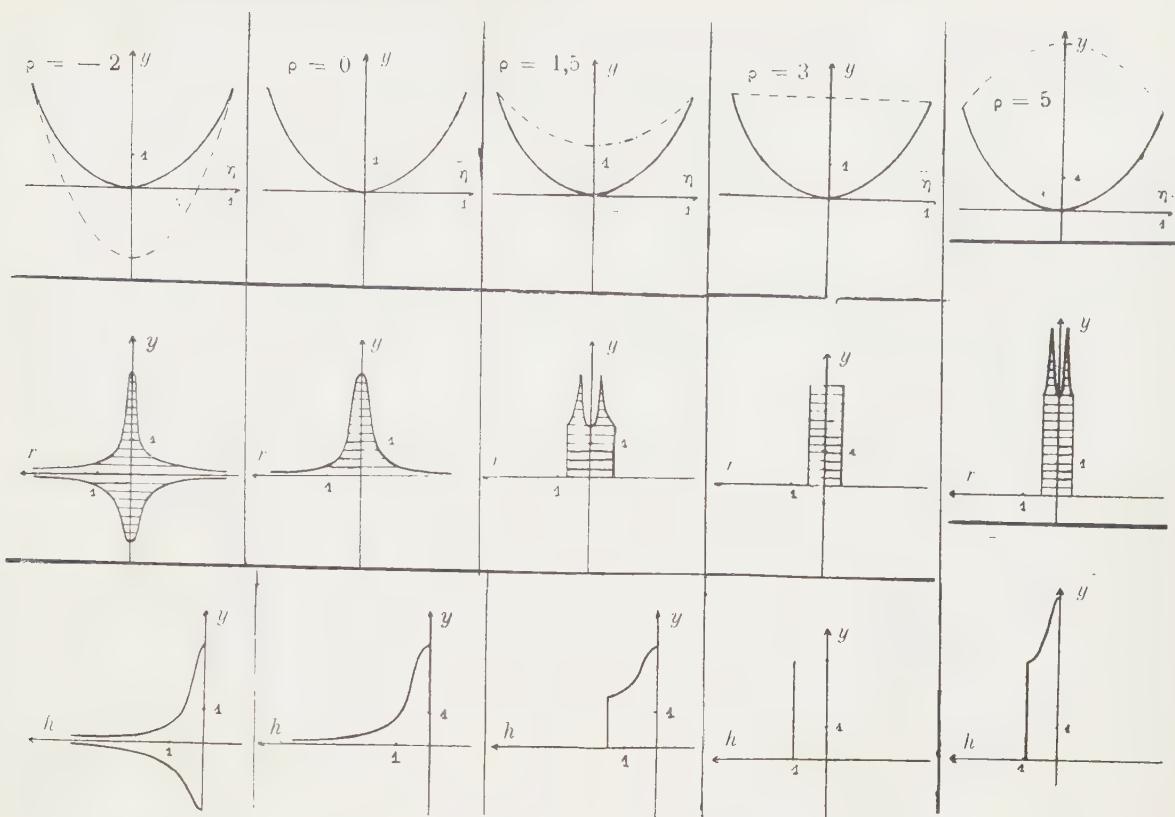


ABB. 13.

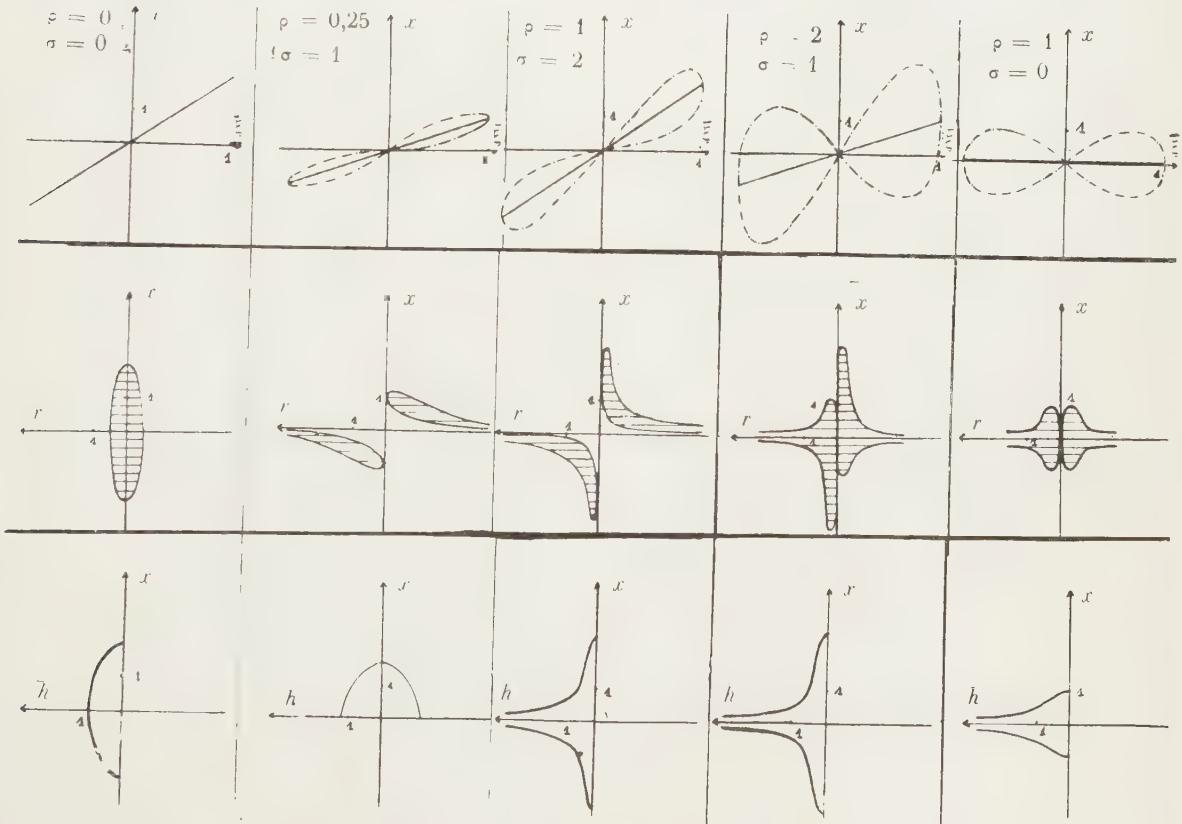


ABB. 14.

erkennt man aber, wenn man zu der obengenannten Aberrationskurve noch eine zweite aufträgt, nämlich diejenige der Strahlen, die den Rand der Ellipse treffen. Für diese « Randstrahlen » ist : $\bar{\xi}^2 = 1 - \bar{\eta}^2$, folglich $y_{Rd} = \tau\bar{\eta} + 3x\bar{\eta}^2 + \rho(1 - \bar{\eta}^2)$. y_{mer} und y_{Rd} tritt man zusammen über $\bar{\eta}$ auf ($-1 \leq \bar{\eta} \leq +1$). Bei den äussersten Werten $\bar{\eta} = \pm 1$ ist der Randstrahl zugleich Meridianstrahl, ist also $y_{Rd} = y_{mer}$. Die beiden Aberrationskurven (y_{mer} , $\bar{\eta}$) und (y_{Rd} , $\bar{\eta}$) treffen sich also an ihren beiden Enden. Dazwischen aber weichen sie in dem Mass von einander ab, wie ρ von Null verschieden ist, so dass man also an ihrer Abweichung den Rinnenfehler ρ erkennen kann. — Ferner ist noch bemerkenswert, dass alle Strahlen mit der A. P. — koordinate $\bar{\eta}$ eine meridionale Aberration $y = \tau\bar{\eta} + 3x\bar{\eta}^2 + \rho\bar{\xi}^2$ haben, die zwischen $y_{mer} = \tau\bar{\eta} + 3x\bar{\eta}^2$ und $y_{Rd} = \tau\bar{\eta} + 3x\bar{\eta}^2 + \rho(1 - \bar{\eta}^2)$ liegt. Wir ersehen also aus der Auftragung der beiden Aberrationskurven y_{mer} und y_{Rd} auch den ganzen vorkommenden y -Wertebereich.

In den Abbildungen 8 bis 13 sind für verschiedene Wertetripel τ , x , ρ untereinander aufgezeichnet : die beiden Aberrationskurven y_{mer} und y_{Rd} (obere Reihe), die gemäss § 3 bestimmte Kurve (u , y) (mittlere Reihe) und die daraus abgezeichnete Helligkeitsverteilung $H = H(y)$ (untere Reihe). In der oberen Reihe ist die Aberrationskurve y_{mer} ausgezogen (—) und die Aberrationskurve y_{Rd} gestrichelt (—. —. —.).

In der mittleren Reihe ist statt u als Ordinate $r \equiv \frac{u}{\alpha \cdot \beta}$ gewählt, in der unteren Reihe entsprechend

$$H \text{ die Grösse } h \equiv \frac{H}{\alpha \cdot \beta}.$$

In den gezeichneten Fällen haben τ , x , ρ folgende Werte :

b) *Sagittales Linienstückchen* : Die Aberrationsfunktion (2a) :

Abb. 8

$$\tau=0, x=0; \rho=0, \rho=3 \quad (2 \text{ Fälle})$$

Abb. 9

$$\tau=1, x=0; \rho=0, \rho=0,25, \rho=0,5 \quad (3 \text{ Fälle})$$

Abb. 10

$$\tau=1,5, x=0,166; \rho=-2, \rho=-0,25, \rho=0, \rho=1,25, \rho=4 \quad (5 \text{ Fälle})$$

Abb. 11

$$\tau=2, x=0,33; \rho=-3, \rho=0, \rho=0,25, \rho=2, \rho=5 \quad (5 \text{ Fälle})$$

Abb. 12

$$\tau=0,66, x=0,66; \rho=-3, \rho=0, \rho=1,84, \rho=2, \rho=-5 \quad (5 \text{ Fälle})$$

Abb. 13

$$\tau=0, x=1; \rho=-2, \rho=0, \rho=1,5, \rho=3, \rho=5 \quad (5 \text{ Fälle})$$

$x = S\xi + 2R\xi\eta$ lautet mit Hilfe der Bezeichnungen : $\sigma \equiv \alpha S$, $P \equiv \alpha\beta R$ in den reduzierten Pupillenkoordinaten $\bar{\xi} \equiv \xi/\alpha$, $\bar{\eta} \equiv \eta/\beta$:

$$x = \sigma\bar{\xi} + 2P\bar{\xi}\bar{\eta}.$$

Daraus folgt für die Sagittalstrahlen $\bar{\eta} = 0$:

$$x_{sag} = \sigma\bar{\xi}.$$

An dem Steigungsmass der Geraden (x_{sag} , $\bar{\xi}$) erkennt man den sagittalen Schnittweitenfehler σ ; jedoch erkennt man den Rinnenfehler P an der Geraden (x_{sag} , $\bar{\xi}$) nicht. Trägt man aber ausser x_{sag} über $\bar{\xi}$ noch die Aberrationskurve der Randstrahlen $\bar{\eta} = \pm \sqrt{1 - \bar{\xi}^2}$:

$$x_{Rd} = \sigma\bar{\xi} \pm 2P\bar{\xi}\sqrt{1 - \bar{\xi}^2}$$

(auf $-1 \leq \bar{\xi} \leq +1$), so treffen sich die beiden Kurven (x_{sag} , $\bar{\xi}$) und (x_{Rd} , $\bar{\xi}$) für die drei Werte $\bar{\xi} = \pm 1$, $\bar{\xi} = 0$ und weichen sonst in dem Mass voneinander ab, wie P von Null verschieden ist. An dieser Abweichung kann man den Rinnenfehler P erkennen. Aus der Auftragung der beiden Aberrationskurven x_{sag} und x_{Rd} ersieht man fernerhin den ganzen vorkommenden x -Wertebereich

In der Abbildung 14 sind für verschiedene Wertepaare σ , P untereinander aufgezeichnet : die beiden Aberrationskurven x_{sag} (ausgezogen —) und x_{Rd} (gestrichelt —. —. —.) in der oberen Reihe, die nach § 4 berechnete Kurve (u , x) in der mittleren Reihe und die daraus abgezeichnete Helligkeitsverteilung $\bar{H} = \bar{H}(x)$ in der unteren Reihe. Statt u ist wieder

$r \equiv \frac{u}{\alpha \cdot \beta}$ und statt H die Grösse $\bar{H} \equiv \frac{H}{\alpha \cdot \beta}$ als Ordinate gewählt. Für die fünf in der Abbildung 14 gezeichneten Fälle haben σ und P die Werte :

$$\begin{array}{lll} P=0, \sigma=2; & P=0,25, \sigma=1; & P=1, \sigma=2; \\ P=2, \sigma=1; & P=1, \sigma=0. \end{array}$$

LITERATUR

- [1] Strahloptik, M. HERZBERGER, Springer-Verlag, Berlin, 1936, p. 36.
- [2] Phénomènes d'interférences dans les images aberrantes des systèmes centrés, E. DURAND ; abgedruckt in : Fleury, Maréchal, Anglade : « La théorie des images optiques », Ed. Revue d'Optique. Paris, 1949, pp. 127-149.

Nachwort : Den Optischen Werken Ernst Leitz, Wetzlar, spreche ich hiermit meinen Dank aus für ein Stipendium, das mir während der Durchführung dieser Diplomarbeit gewährt wurde. Ferner danke ich Herrn Dozent Dr H. MARX für die Anregung der Arbeit und die Hilfe bei ihrer Durchführung.

Zur Beurteilung der Bildgüte nach Definitionshelligkeit oder $\lambda/4$ -Kriterium

von Hermann SLEVOGT

Optisches Institut der Technischen Universität, Berlin-Charlottenburg.

ZUSAMMENFASSUNG. — Eine neue Darstellung der Wellenaberration liefert die Definitionshelligkeit als Quadrat der Sehnenlänge einer Kurve von gegebener Bogenlänge und ermöglicht so einen vollständigen Überblick über sämtliche Typen von Wellenflächen mit vorgegebener Definitionshelligkeit. Die Beispiele der Phasenplatte und des Bifokalglasses zeigen, dass die Erfüllung der $\lambda/4$ -Forderung weder notwendig noch hinreichend ist dafür, dass die Definitionshelligkeit die erwünschte Größe von mehr als 80 Prozent bekommt.

SOMMAIRE. — Une nouvelle représentation du chemin optique aberrant fournit la valeur de l'éclairement central (Definitionshelligkeit) sous forme du carré de la longueur de corde de la courbe de longueur donnée et donne la possibilité de revoir complètement tous les cas de l'éclairement central fixé a priori. Les exemples de la lame de phase et de la lentille « bifocale » montrent que la règle de RAYLEIGH n'est ni nécessaire, ni suffisante, pour que l'éclairement atteigne (ou dépasse) la valeur souhaitée de 80 %.

SUMMARY. — A new representation of the wave-aberration gives the « Strehl definition » (Definitionshelligkeit) as the square of the length of the chord of a curve of given length. A complete survey of all types of wave-surfaces with a given « Strehl definition » is thus made possible. The examples of the phaseplate and the bifocal lens show that the fulfilment of Rayleigh's $\lambda/4$ criterion is neither necessary nor sufficient to give the desired « Strehl definition » of 80 %.

Zur Kennzeichnung der Bildgüte, welche eine Wellenfläche in einem gegebenen Aufpunkt liefert, verwendet man nach dem Vorgang von STREHL [1] gern die Definitionshelligkeit : man berechnet aus dem Verlauf von Wellenamplitude $A(\omega)$ und Wellenaberration $l(\omega)$ gegenüber einer um den Aufpunkt gelegten Kugelwelle die Grösse

$$(1) \quad |B|^2 = \left(\int_{\omega} A(\omega) \cos 2\pi \frac{l}{\lambda} d\omega \right)^2 + \left(\int_{\omega} A(\omega) \sin 2\pi \frac{l}{\lambda} d\omega \right)^2$$

und vergleicht sie mit dem Wert

$$(2) \quad |B_0|^2 = \left(\int_{\omega} A(\omega) d\omega \right)^2$$

welchen eine fehlerfreie Kugelwelle mit derselben Aperturbegrenzung für den Raumwinkel ω und derselben mittleren Leuchtdichte dort liefern würde ; sobald der

Quotient $\left| \frac{B}{B_0} \right|^2 \geq 81\%$ ist, gilt die Wellenfläche nach Lord Rayleigh als praktisch fehlerfrei.

Vielfach wird aber die Berechnung der Definitionshelligkeit als zu mühsam empfunden und dafür lieber das sogenannte $\lambda/4$ -Kriterium benutzt : man versucht, die Abweichungen $\Delta l = l - l_0$ der Wellenfläche von der Vergleichskugel in einen möglichst schmalen Streifen $|\Delta l| \leq \text{Const. einzusperren}$. Gelingt es, mit der Breite dieses Streifens den Betrag $\lambda/4$ nicht zu überschreiten, so wird die Wellenfläche wiederum unter Berufung auf Lord RAYLEIGH — als praktisch fehlerfrei angesehen.

Obwohl dieses Kriterium sehr plausibel erscheint, darf man doch nicht annehmen, dass es allemal zu demselben Urteil führt wie die Berechnung der Definitionshelligkeit (vergl. das Beispiel bei MARÉCHAL [5] S. 9.) ; und da andererseits die Berechnung der Definitionshelligkeit nach (1), (2) bei allgemeinen Wellen-

aberrationen selbst dann zu kompliziert schien, wenn man Rotationssymmetrie voraussetzte, so hat VÄISÄÄLÄ [2], [3] bereits vor 30 Jahren vorgeschlagen, einen Näherungswert für (1) zu verwenden, den man durch Abbrechen der Winkelfunktionen hinter dem quadratischen Glied als Mittelwert $\overline{(\Delta l)^2}$ der Quadrate der Abweichungen von einem geeigneten l_0 bekommt. Die Idee ist in neuerer Zeit von NIJBOER [4] und von MARÉCHAL [5] weiter ausgeführt und präzisiert worden ; natürlich sind derartige Betrachtungen nur solange sinnvoll, wie man $|\Delta l|$ als genügend klein voraussetzen darf.

Im folgenden soll nun ohne Begrenzung für die Grösse der Wellenaberration möglichst allgemein untersucht werden, wieweit die Urteile voneinander abweichen können, welche auf Grund der Definitionshelligkeit und der Streuungsbreite für Δl gefällt werden. Dabei wird sich eine Darstellung der Wellenaberration als nützlich erweisen, für die, wegen ihrer Ähnlichkeit zu den bekannten Cornuschen Spiralen, der Name C-Kurven vorgeschlagen wird. (vergl. die Kurven in Abb. 1 bis 5) :

Für irgendein Flächenelement der Wellenfläche, das vom Aufpunkt aus unter dem Raumwinkel $d\omega$ erscheint, sei die optische Weglänge $l(\omega)$ bis zum Aufpunkt und die Wellenamplitude $A(\omega)$ bekannt. Dann kennt man nach dem Huygensschen Prinzip auch seinen Beitrag

$$(3) \quad dL = A(\omega) C^{2\pi i} \frac{l}{\lambda} d\omega$$

zur (komplexen) Lichterregung im Aufpunkt. Dieser Beitrag soll dargestellt werden durch das Linienelement der C-Kurve mit der

$$(4) \quad \text{Länge } dL = A(\omega) d\omega \quad \text{und der}$$

$$(5) \quad \text{Richtung } \varphi = 2\pi \frac{l}{\lambda} \quad (\text{Richtung } \varphi=0 \text{ beliebig})$$

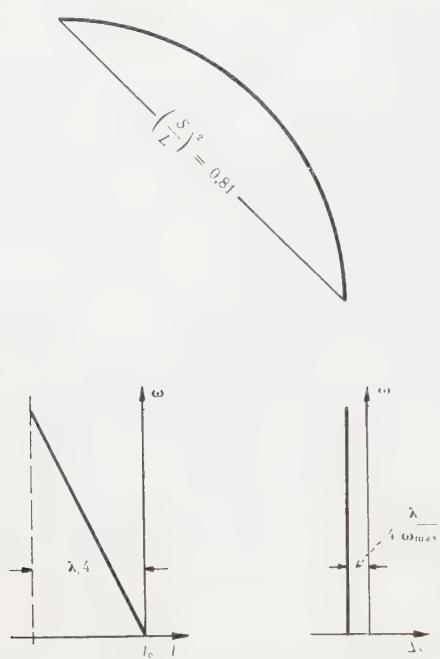


Abb. 1. — Falsche Einstellung.

$\Delta S = a$; $l = l_0 + a \cdot \omega$. | $a \cdot \omega_{\max}$ | = $\lambda/4$ bedeutet für ΔS den Spielraum $\frac{\lambda}{4 \cdot \omega_{\max}} \approx 2 \cdot \sin^2 u_{\max}$ mit Definitionshelligkeit 0,8106.

Demnach liegt zwischen Anfang und Ende der C-Kurve die

$$(6) \quad \text{Bogenlänge } L = \int A(\omega) d\omega \quad \text{und die}$$

$$(7) \quad \text{Sehnenlänge } S =$$

$$= \sqrt{\left(\int A(\omega) \cos 2\pi \frac{l}{\lambda} d\omega \right)^2 + \left(\int A(\omega) \sin 2\pi \frac{l}{\lambda} d\omega \right)^2}.$$

Beim Vergleich mit (4), (2) bemerkt, man dass $S^2 = |B|^2$ und $L^2 = |B_0|^2$, dass somit allgemein

$$(8) \quad \left(\frac{S}{L} \right)^2 = \left(\frac{\text{Sehnenlänge}}{\text{Bogenlänge}} \right)^2$$

die *Definitionshelligkeit* der durch die C-Kurve dargestellten Wellenfläche ist.

Bisher ist von Symmetrie-Eigenschaften der Wellenflächen noch kein Gebrauch gemacht worden; das soll im folgenden geschehen, wobei der Einfachheit halber konstante Amplitude $A(\omega) = 1$ vorausgesetzt wird:

a) Betrachtet man Zylinderwellen und beschränkt man sich dabei auf solche Wellenaberrationen, welche quadratische Funktionen einer Längenkoordinate v sind (Fresnelsche Beugung an Halbebene, Spalt, Gitter), so erhält man die bekannten Cornu-schen Spiralen, bei denen der lineare Zusammenhang zwischen Raumwinkel ω und Koordinate v die bekannten Verschiebungsbetrachtungen ermöglicht.

b) Setzt man Rotationssymmetrie voraus mit :

$$(9) \quad d\omega = \sin u \cdot du; \omega = 1 - \cos u = 2 \sin^2 \frac{u}{2} \approx \frac{1}{2} \sin^2 u,$$

so erhält man die Längsaberration ΔS der Wellennormale (des «Lichtstrahls») gegenüber dem Aufpunkt bekanntlich durch Differentiation der optischen Weglänge l nach dem Raumwinkel :

$$(10) \quad \Delta S = \frac{dl}{d\omega},$$

woraus folgt, dass bei den C-Kurven hier die Krümmung $\frac{1}{R}$ proportional zur Längsaberration wird.

$$(11) \quad \frac{1}{R} = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta S.$$

In den Abbildungen sind für fünf Beispiele rotationssymmetrischer Wellenflächen jeweils a) die C-Kurve, b) der Gang der Wellenaberration $l - l_0$ mit dem Raumwinkel ω und c) die Längsaberration ΔS als Funktion von ω dargestellt. Alle C-Kurven haben dieselbe Bogenlänge; außerdem sind bei Abbildung 1 bis 4 die

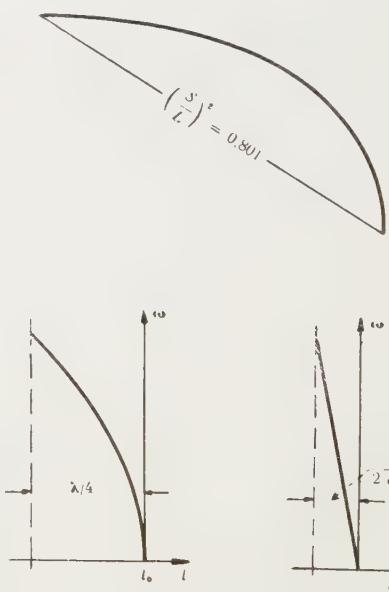


Abb. 2. — Öffnungsfehler mit Aufpunkt im Gaussschen Bildpunkt.

$$\Delta S = 2C\omega; \quad l = l_0 + C \cdot \omega^2. \quad |C| \cdot \omega_{\max} = \lambda/4$$

liefert für ΔS die Begrenzung $\frac{\lambda}{2 \cdot \omega_{\max}} \approx \frac{\lambda}{\sin^2 u_{\max}}$ mit Definitionshelligkeit 0,8005.

Konstanten so gewählt, dass das $\lambda/4$ -Kriterium erfüllt ist, woraus sich für die Längsaberration ΔS die angegebenen, bei Abbildung 1 bis 3 bereits bekannten wellenoptischen Toleranzen ergeben.

Wie man sieht, liegt bei den drei ersten Beispielen die Definitionshelligkeit zwischen 80 und 81 %; man könnte demnach vermuten, dass die beiden Kriterien allemal zu übereinstimmenden Urteilen führen

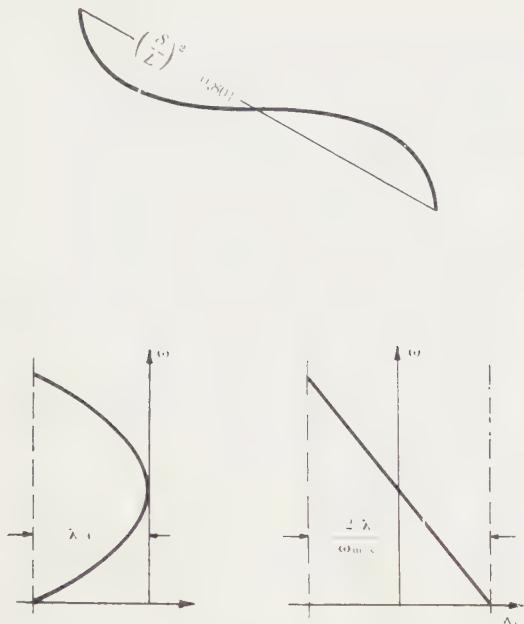


Abb. 3. — Öffnungsfehler mit günstiger Einstellung

$$\Delta S = a + 2\omega c = 2c \left(\omega - \frac{1}{2}\omega_{\max} \right) : l = l_0 + c \left(\omega - \frac{1}{2}\omega_{\max} \right)^2.$$

$$\frac{c}{4} \mid \omega^2_{\max} = \lambda^4 \text{ erlaubt für } \Delta S \text{ den Spielraum}$$

$$\frac{2\lambda}{\omega_{\max}} \approx \frac{4\lambda}{\sin^2 \omega_{\max}} \text{ mit Definitionshelligkeit 0,8005.}$$

würden — Lord RAYLEIGH scheint so zur Aufstellung der « $\lambda/4$ -Bedingung » veranlasst worden zu sein.

Indessen zeigen die beiden letzten Beispiele, dass ein solcher Schluss nicht erlaubt ist, dass vielmehr die Einhaltung der $\lambda/4$ -Grenze weder hinreichend (Abb. 4) noch notwendig (Abb. 5) ist für die Erreichung einer befriedigenden Definitionshelligkeit.

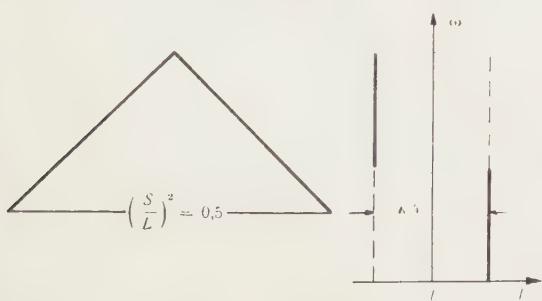


Abb. 4. — Phasenplatte.

Beeinflusst die Richtung der Wellennormalen nicht, daher $\Delta S = 0$. In der einen Hälfte des Raumwinkels $\varphi = +45^\circ$, in der anderen $\varphi = -45^\circ$. Definitionshelligkeit $= \sin^2 45^\circ = 0,5$.

Zur Gestalt der C-Kurven ist noch folgendes zu sagen : Falsche Einstellung $\Delta S = a$ liefert Kreisbogen mit

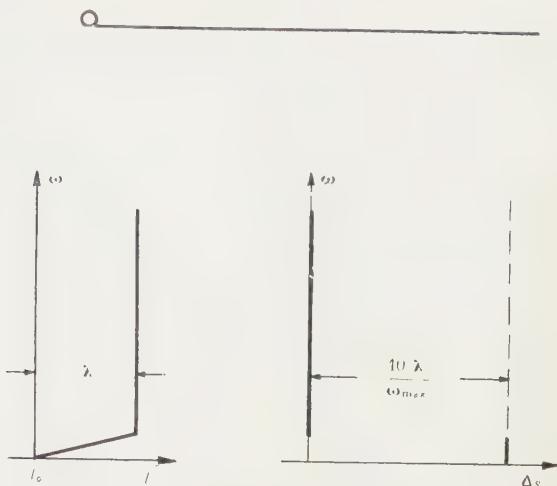


Abb. 5. — Bifokalglas, dessen Nahtteil 10 % des Raumwinkels einnimmt.

Für $\omega \leq 0,1$ ist $|\Delta S| = 10 \cdot \frac{\lambda}{\omega_{\max}}$, daher $l = 10 \lambda \cdot \omega$

(man beachte gegen über den an jeren Abb. den verkleinerten Massstab bei b) und c)!). Trotzdem Definitionshelligkeit gleich 0,81.

dem Zentriwinkel $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta S \cdot \omega_{\max} \approx \pi \Delta S \cdot \frac{\sin^2 u_{\max}}{\lambda}$;

daher die Definitionshelligkeit

$$(12) \quad \left(\frac{S}{L} \right)^2 = \left(\frac{\sin \varphi/2}{\arcsin \varphi/2} \right)^2$$

in unserem Sonderfall gleich $\frac{8}{\pi^2}$.

Im einfachsten Fall von Öffnungsfehler :

(13) $\Delta l = a \cdot \omega + c \cdot \omega^2$, daher $\Delta S = a + 2c \cdot \omega$ bekommt man als C-Kurve eine Spirale, deren rechtwinklige Koordinaten als Fresnelsche Integrale $C(u)$, $S(u)$ aus dem Tabellenwerk [6] von JAHNKE-EMDE entnommen werden können. Die beiden Hälften der C-Kurve in Abbildung 3 gehen aus der Kurve in Abbildung 2 durch Verkleinern auf die Hälfte hervor, lassen also jeweils eine Verdoppelung des Maximalbetrages für $|\Delta S|$ und damit insgesamt die vierfach Toleranz für die Längsaberration zu. Die Definitionshelligkeit errechnet sich beidemal als.

$$(14) \quad \left(\frac{S}{L} \right)^2 = C(1)^2 + S(1)^2 = 0,80_{05}.$$

Wie man sieht, ist Beispiel 3) aus 2) durch Kombination mit 1) entstanden, indem die Verschiebung des Nullpunkts für ΔS (d. h. Addition eines konstanten

Summanden zu allen Krümmungswerten $\frac{1}{R}$) eine lineare Änderung von φ und damit ein stetiges Durchkrümmen der Kurve bewirkt.

Auch Abbildung 4 zeigt wieder eine sehr einfache Form, typisch für alle Phasenplatten, aus der Abbildung 5 durch Kombination mit einem passenden Betrag falscher Einstellung abgeleitet werden kann.

Man bemerkt übrigens, dass man leicht sämtliche C-Kurven angeben kann, bei denen die Sehnenlänge gleich $\frac{9}{10}$ der Bogenlänge und die Definitions helligkeit somit genau gleich 81 % ist :

Man nimmt einen Blechstreifen o. ä. der Länge 1 und befestigt seine beiden Enden derart auf einem Brett, dass die Sehnenlänge 0,9 festliegt, die Richtungen aber beliebig einstellbar bleiben. Innerhalb des Spielraums für die Biegung des Streifens bleiben offenbar noch viele Möglichkeiten, mit dem Richtungsbereich $\Delta\varphi$

den Wert 90° zu überschreiten, welcher der $\lambda/4$ -Grenze entspricht, ohne dass die Definitions helligkeit leidet.

- [1] Vergl. z. Beispiel Strehl, *Z. Instrumentenkde*, t. 22, 1902, p. 213-217.
- [2] Y. VÄISÄLÄ : Neue Methoden..., Dissert. Turku, 1922 ; vergl. Wiedergabe bei.
- [3] J. PIGHT : Optische Abbildung, Braunschweig, 1931.
- [4] B. R. A. NIJBOER : Dissertation Groningen, 1942.
- [5] A. MARÉCHAL : *Cahiers de Physique*, n° 26, décembre 1944, p. 1-15.
Rev. Opt., t. 26, 1947, p. 257-277.
- [6] JAHNKE-EMDE : Tafeln höherer Funktionen, 6. Aufl., Leipzig 1948, S. 35.

Manuscrif reçu le 21 juin 1953.

The Second-Order Aberrations in the Interferometric Measurement of Concentration Gradients

by Harry SVENSSON

Laboratories LKB-Produkter Fabriksaktiebolag, Stockholm

SUMMARY. — The second-order aberrations in interferograms of cells with a continuously varying refractive index have been computed for those interferometric methods where an optical image of the cell is produced. The aberrations have been given in terms of four parameters, the cell thickness a , the cell position parameter r , the convergence parameter k , and the angular off-axis position ρ of the centre of the light source. It has been shown that the aberration corresponding to the Wiener skewness of the gradient curve disappears if a plane situated $1/3$ of the cell thickness from the front wall is brought into focus by the camera. The off-axis position of the light source has been found to be without bad effects, resulting only in a small parallel shift of the interferogram as a whole along the cell axis. An illumination system which gives converging or diverging light through the cell has been found to give rise to an aberration which can be corrected for by determining the optical magnification factor of the cell from the slightly defocused plane through the middle of the cell. A vertically extended light source has been shown to cause blurring of fringes lying close together, which blurring only disappears if the middle of the cell is brought to focus. It has been pointed out that, using a very sharp boundary in the cell, this property offers excellent means of accurate localization of the conjugate image plane of the plate, which should be useful in different connections in optical adjustment and testing of lenses. On the whole, it has been found that all sorts of second-order aberrations can be eliminated by a proper choice of optical arrangements, adjustments, and procedures which are described and specified in the text and which do not require extra work. The only exception from this is the case where very rapid diffusion processes or other circumstances make it necessary to use a vertically extended light source in order to get the necessary light intensity for a short exposure time. It will then be necessary to focus on the middle of the cell in order to get sharp fringes. The fringe displacement corresponding to the Wiener skewness will then remain and has to be corrected for.

SOMMAIRE. — On a calculé l'aberration du second ordre dans les interférogrammes de cuves à variation continue d'indice de réfraction, dans les cas où l'on forme une image de la cuve.

Les aberrations ont été exprimées en fonction de 4 paramètres, l'épaisseur de la cuve a , le paramètre de position dans la cuve r , le paramètre de convergence k , et la distance angulaire ρ du centre de la source à l'axe. On montre que l'aberration due à l'obliquité (au sens de Wiener) du gradient d'indice disparaît si l'on met au point sur un plan situé au $1/3$ de l'épaisseur de la cuve à partir de la face d'entrée. L'obliquité de la direction de la source est sans effet nuisible car elle ne produit qu'une légère translation des franges le long de l'axe de la cuve. Un système d'éclairage produisant de la lumière convergente ou divergente dans la cuve produit une aberration que l'on peut corriger si l'on détermine le grandissement optique de la cuve pour le plan dont la mise au point a été légèrement déplacée lors du passage à travers le milieu de la cuve. Une source, étendue verticalement, produit un brouillage des franges fines qui ne disparaît que si la mise au point est faite sur le centre de la cuve. On a montré, en plaçant un écran à bord net dans la cuve, que cette propriété est un excellent moyen de localiser avec précision l'image de l'écran ; elle pourrait être utile en particulier pour certains réglages optiques ou pour le contrôle des lentilles. En résumé, on montre que toutes les aberrations secondaires peuvent être éliminées par un choix approprié des caractéristiques et de l'arrangement des éléments optiques, ce qui ne demande aucun travail supplémentaire. Une exception a lieu dans le cas où une diffusion très rapide ou toute autre raison rendent nécessaire l'emploi d'une source étendue verticalement, donnant suffisamment de lumière pour pouvoir photographier avec un court temps de pose. Il est alors nécessaire de mettre au point sur le milieu de la cuve de façon à obtenir des franges fines. Le déplacement des franges dû à l'obliquité de Wiener subsiste alors et il faut en tenir compte.

ZUSAMMENFASSUNG. — Die Abweichungen zweiter Ordnung in den Interferenzaufnahmen einer Küvette mit einer stetigen Änderung des Brechwertes werden für solche interferometrischen Verfahren berechnet, bei denen eine optische Abbildung der Zelle erfolgt. Die Abweichungen lassen sich in Abhängigkeit von vier Konstanten darstellen, der Schichtdicke a , des Küvettenwertes r , der Konvergenz k , und der im Winkelwert betrachteten Dezentrierung ρ der Lichtquelle. Es wird gezeigt, dass die Ablenkung, die der Wienerschen Verzerrung der Gradientenkurve entspricht, verschwindet, wenn man auf die Ebene einstellt, die $1/3$ der Schichtdicke von der Vorderwand entfernt liegt. Eine Verschiebung der Lichtquelle aus der Achse verursacht keine störenden Fehler, da sie nur eine geringe Parallelverschiebung des Interferenzbildes bewirkt. Eine Beleuchtung mit konvergentem oder divergenterem Licht innerhalb der Kuvette erhält zwar die Abweichung, kann sie aber korrigieren, indem man die zugehörige optische Vergrößerung bestimmt. Eine Lichtquelle in vertikaler Ausdehnung verursacht verschwommene Streifen, die eng zusammenliegen; die Unschärfe verschwindet, wenn man auf die Mitte der Küvette scharf eingestellt wird. Es sei betont, dass die Verwendung eines sehr engen Bündels in der Zelle eine genaue Lokalisierung der konjugierten Bildebene erlaubt. Im Übrigen lassen sich alle Abweichungen zweiter Ordnung durch eine geeignete Wahl der optischen Anordnung, Justierung und Massnahmen vermeiden, die im Text im Einzelnen beschrieben sind und keinerlei Mehrearbeit bedeuten. Die einzige Ausnahme davon bildet der Fall, wo ein sehr schnell verlaufender Diffusionsvorgang oder andere Umstände die Verwendung einer Lichtquelle vertikaler Ausdehnung erfordern, um mehr Licht für eine kürzere Belichtungszeit zu gewinnen. Man muss dann auf die Mitte der Küvette einstellen, um scharfe Streifen zu bekommen. Die Verlagerung der Streifen gemäß der Wienerschen Anordnung muss man dann in Kauf nehmen und berücksichtigen.

Introduction. — It is now well established that interferometric methods offer the most powerful means in the measurement of concentration gradients, and interferometry is of growing importance in diffusion and electrophoresis studies, where such measurements play a considerable role. It is possible with these methods to reach an accuracy of one unit in the sixth decimal place of the refractive index for a 1 cm cell, and correspondingly farther with thicker cells. This is a precision that appreciably surpasses that of formerly used methods, and it is becoming increasing-

ly important to investigate the order of magnitude of some sources of error which have not hitherto been cleared up definitely and which might interfere with results of the above-mentioned high precision.

This investigation will be restricted to those types of interferometers where the cell is brought into focus in the plane where the interference phenomenon takes place. The results will thus be immediately applicable to the JAMIN and MICHELSON interferometers as used by LABHART and STAUB [1], LOTMAR [2], and ANTWEILER [3], [4], and to the astigmatic modification

of the Rayleigh interferometer used by CALVET [5], [6], [7], PHILPOT and COOK [8], LONGSWORTH [9], [10], RÖGENER [11], and the present author [12], [13], [14], [15], [16]. They do not apply to the GOUY diffusiometer.

The statement that the cell is brought into focus has evidently no well-defined meaning unless the cell thickness is very small in comparison with the dimensions of the optical system. In cases where it is definitely possible to distinguish between bringing the front and back walls of the cell into focus, one has to give information of which plane in the cell is concerned in the optical imagery. Most investigators have then regarded it as self-evident that the middle of the cell should be brought into focus on the plate. However, the *Schlieren*-optical methods, which have been extensively used for the production of records of the refractive index gradient, are known to give rise to a certain skewness (the WIENER [17] skewness) in the gradient curve, and it was pointed out by the present author [18], [19] that it should be possible to eliminate this skewness by focusing the camera on a plane not coinciding with the middle of the cell. The fact that skewness in both directions can be produced artificially has also been demonstrated by LONGSWORTH [20]. Consequently there must be one position of the cell for which the skewness is zero, at least in the top of the gradient curve. It only remains to be seen for which position this occurs.

A simple non-mathematical argument reveals that it cannot be taken for granted that focusing the camera on the middle of the cell will give the best result. For that purpose we will inspect figure 1, where a

which, as a first approximation, can be regarded as a parabola. It leaves the cell with another direction at a point which is situated slightly lower than the entrance point. The cell-focusing optical system will project the deflected pencil to a point on the plate which corresponds to the x coordinate which the pencil acquires when it is traced rectilinearly backwards to the conjugate image plane of the plate. If this is in the middle of the cell, it is readily seen that this coordinate will be identical with the entrance coordinate, while the angular deflection and the phase retardation in the cell are governed by the refractive properties within the shaded x interval situated exclusively below this coordinate. This fact is the origin of the WIENER skewness. If, instead, the camera is focused on a plane somewhere between the middle of the cell and its front wall, it will project the pencil to a coordinate within the shaded interval actually swept through by the pencil, and for a certain position of the conjugated image plane the skewness must be expected to pass through zero.

Most interferometric arrangements of this sort are characterized by parallel light through the cell and by a light source situated on the optical axis, but this investigation will not be restricted to such special cases. Therefore, a finite distance between the light source and the cell will be assumed, and the light source will be allowed to have a certain off-axis position.

Geometric - Optic Basis of the Analysis. — This treatment does not take any lens aberrations into account; a perfect optical system will be postulated. The difference in optical path length has to be computed from the light source to the plate where the interferogram is formed. However, because of the optical imagery from a certain plane in the cell to the plate, there will be no phase difference between light pencils traversing different paths between corresponding points in those two planes (*cf.* CALVET and CHEVALIERIAS [7]). Consequently, it will be sufficient to compute the difference in optical path length between the light source and the conjugate image plane of the plate.

In order to be coherent, the two rays which we will consider must originate from the same spot in the light source, and in order to be capable of interference, they must reach the same spot in the image plane of the plate. Since we shall assume that the refractive index gradient has everywhere the direction of the positive or negative x -axis, it will also be sufficient to consider the x , z -plane.

In figure 2, the x axis is vertical, and the z axis is identical with the optical axis of the system. The cell is situated between the coordinates $z = 0$ and $z = a$, and the conjugate image plane of the plate is defined by $z = ra$. Here r is a dimension-less parameter which can be chosen at will by shifting the cell along the optical axis. In the figure, this plane has for simplicity been drawn outside the cell, but, as we have already realized qualitatively, it should of course be

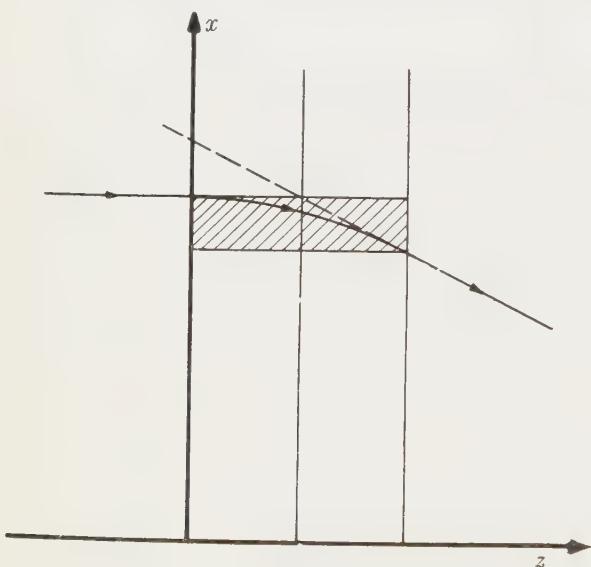


FIG. 1.

light pencil is seen to enter the cell horizontally, in the direction of the optical axis (z -axis). Within the cell, the refractive index varies along the vertical x -axis, and consequently the pencil describes a curve

situated somewhere within the cell. This corresponds to an r value smaller than unity. The geometrical position of the image plane, however, depends upon the refractive index and varies as $1/n$. Consequently, it has no meaning to say that a certain plane within the cell is in focus unless the refractive index there is also given. Therefore, we will state by definition that the plane $z = ra$ is brought into focus on the plate when the cell is filled with a medium of the constant refractive index m . With this agreement, the mathematical analysis will retain its validity as far as this medium extends. In figure 2, it has for simplicity been thought to extend throughout the optical system, and also in the direction perpendicularly to the paper, in which direction we have the reference cell. Only within the cell under investigation there is another refractive index, the variable $n(x)$. It is easy to get rid of this simplifying assumption at the end of the computation.

The light source A, (fig. 2), is situated at the geo-

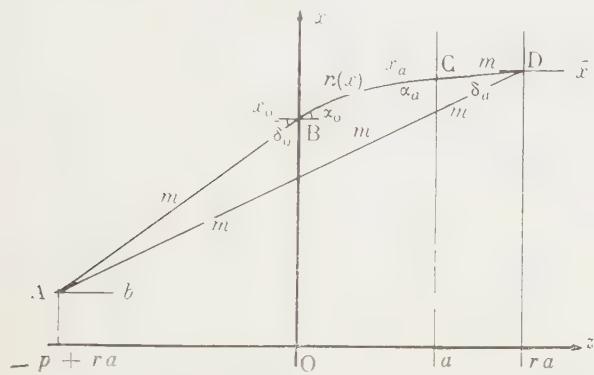


FIG. 2.

metrical distance p from the plane $z = ra$, thus at the optical distance p/m , and at the distance b from the optical axis. One of the coherent rays strikes the back cell wall at B with the level x_o at an entrance angle δ_o . There it is refracted to the angle α_o inside the cell, and continues through the cell along the trajectory BC. At the point C, the angle with the z axis is α_a , and after refraction at the front wall, it becomes δ_a outside the cell. Finally the pencil travels the distance CD in the medium of refractive index m , where the point D in the conjugate image plane of the plate has the level \bar{x} . The other pencil takes the direct rectilinear course AD through the reference cell situated in a plane parallel with the paper, and also containing the medium of refractive index m .

The Exact Expression for the Path Difference. — It is now easy, directly from figure 2, to write down the exact expression for the path difference between the two interfering rays ; it is

$$(1) \quad \Delta S = m \sqrt{(x_o - b)^2 + (p - ra)^2} + \\ + \int_{x_o}^a \frac{n(x) dz}{\cos \alpha} + \frac{ma(r-1)}{\cos \delta_a} - m \sqrt{(\bar{x} - b)^2 + p^2}.$$

The work now to be performed consists in converting this expression into a form containing only known parameters and the coordinate \bar{x} . The last-mentioned requirement is significant because it is this coordinate that is photographed. The coordinates x_o and x_a have to be eliminated, as well as the angles α_o , α_a , and δ_a . The parameters that are allowed to remain in our final expression are consequently : the cell position parameter r , the cell thickness a , the refractive index m , the variable refractive index n and its derivatives with respect to x at the level \bar{x} , and the entrance angle δ_o . The last parameter will later be split up into two new parameters related to the parallelism of the light through the cell and to the off-axis position of the light source.

The different variables are interconnected in a most complicated manner. For the entrance angle, we have

$$(2) \quad \tan \delta_o = \frac{x_o - b}{p - ra}$$

and SNELL's law gives the three equations

$$(3) \quad m \sin \delta_o = n(x_o) \sin \alpha_o,$$

$$(4) \quad n(x_a) \cos \alpha_a = n(x_o) \cos \alpha_o,$$

$$(5) \quad n(x_a) \sin \alpha_a = m \sin \delta_a.$$

By squaring and adding them, one gets

$$(6) \quad m^2 (\sin^2 \delta_o - \sin^2 \delta_a) = n^2(x_o) - n^2(x_a).$$

Further, we have

$$(7) \quad \bar{x} = x_a + a(r-1) \tan \delta_a$$

$$(8) \quad x_a = x_o + \int_{x_o}^a \tan \alpha dz.$$

Finally, along the trajectory, SNELL's law can be written in the form

$$(9) \quad n(x) \cos \alpha = C$$

where C is a constant. Equation (4) is a special case of equation (9). Differentiation of (9) with respect to z gives the relation

$$(10) \quad \frac{dz}{dz} = \frac{n'(x)}{n(x)}$$

which forms the basis of the *Schlieren-optical* observation methods.

The first-order approximation of equation (1) is

$$(11) \quad \Delta S = a [n(\bar{x}) - m]$$

which equation forms the basis of the interferometric methods in question here. The small difference between the right-hand member in (1) and (11) may be called aberrations although they have nothing to do with the aberrations of the lenses in the optical system. By analogy with the five SEIDEL lens aberrations, however, they can be computed by expansion of equation (1) into a power series. It is the object of this investigation to derive the second-order approximation of equation (1), i. e. to compute those terms in the power expansion which are one order of magnitude smaller than the first-order approximation given by (11).

The Optical Path Length along the Trajectory. — Starting from the differential equation

$$(12) \quad \frac{dS}{dz} = \frac{n(x)}{\cos \alpha} = \frac{n^2(x)}{C}$$

and differentiating twice with respect to z , we get

$$(13) \quad \frac{d^2S}{dz^2} = \frac{2n(x) n'(x) \tan \alpha}{C},$$

$$(14) \quad \frac{d^3S}{dz^3} = \frac{2}{C} \left[n'^2(x) + \tan^2 \alpha [n(x) n''(x) + 2n'^2(x)] \right].$$

In a TAYLOR expansion of S into powers of a , (12) has to be multiplied by a , (13) by $a^2/2$, and (14) by $a^3/6$. Consequently we can now get the first conception of the order of magnitude of the aberration terms that we are looking for. The term $an(x)/\cos \alpha$, e. g., contains, in addition to the main term $an(x)$, a correction term $a\alpha^2/2$, which we have to take into account since it cannot be regarded as negligibly small in comparison with the first-order approximation (11), even with α as small as 0.01. Further, it is very reasonable to regard $an'(x)$ as a quantity of the same order of magnitude as α , $an'(x)$ being the angle of deflection in the cell. So we conclude that the term $a^3n^2(x)$ is also worthy of consideration. For the same reason, the term containing $a^2n'(x)\alpha$ has to be included in our equations. The last term in (14), however, which contains the square of both α and of $an'(x)$, is negligibly small in comparison with the first term in (14) and can be omitted. It remains to be seen what to do with the term containing the factor $a^3\alpha^2n''(x)$. This cannot be decided upon without knowledge of the function $n(x)$.

We will assume, then, that this function is the refractive index distribution given by an ideally diffusing, originally sharp boundary. Taking the distance between the maximum gradient and the inflexion points of the gradient curve as the unit along the x axis, we then have

$$(15) \quad n'(x) = \Delta n f(x)$$

where Δn is the refractive index increase across the boundary, and $f(x)$ is the equation of the normal curve of error. The second derivative is then $= \Delta n f'(x)$. Since f' never exceeds the value 0.5, and since Δn is at least as small as α , the term in question becomes of the same order of magnitude as an α^3 term. Consequently it will not be included in this treatment. It should be noted, however, that the factor a^3 , when a is measured in units of half the breadth of the diffusion boundary, may assume appreciable values. When the term $a^3\alpha^2n''(x)$ is omitted, therefore, it must be born in mind that this is permissible only for reasonable values of the cell thickness in relation to the breadth of the diffusion boundary. This second-order theory will consequently not be able to tell anything about errors resulting from too thick a cell or from too sharp a boundary, respectively. To that end, a third-order aberration theory will be necessary, including the $a^3\alpha^2n''(x)$ term and other terms of the third degree

occurring in the higher derivatives of S with respect to z .

If we introduce the abbreviation n_o for $n(0)$ and n'_o for $n'(0)$, we can now write the following second-order approximation of the path length integral through the cell

$$(16) \quad \int_0^a \frac{n(x) dz}{\cos \alpha} = an_o + \frac{an_o \alpha_o^2}{2} + a^3 \alpha_o n'_o + \frac{a^3 n_o'^2}{3 n_o}.$$

The Exit Angle. — In the same manner, it is possible to develop the exit angle α into a power series of a . For the present purpose, however, it is sufficient to use the well-known first-order approximation

$$(17) \quad \alpha_a = \alpha_o + \frac{an'_o}{n_o}.$$

For the external exit angle, we get

$$(18) \quad \delta_a = \delta_o + \frac{an'_o}{m}.$$

The Exit Coordinate. — A power series in z can also be used to express the successive approximations of the vertical coordinate x of the trajectory anywhere within the cell. One then has to start from the differential equation

$$(19) \quad \frac{dx}{dz} = \tan \alpha$$

and to differentiate further with respect to z . For $z = a$, one obtains the following first-order approximation

$$(20) \quad x_a = x_o + a\alpha_o + \frac{a^2 n'_o}{2 n_o}$$

which is already well-known. With the aid of equations (7) and (18), further, we get the following relation between the entrance coordinate x_o and the coordinate \bar{x} in the conjugate image plane of the plate

$$(21) \quad \Delta x = \bar{x} - x_o = \frac{a\delta_o(m - n_o)}{n_o} + ra\delta_o + \frac{a^2 n'_o (m - n_o)}{2mn_o} + \frac{a^2 n'_o (2r - 1)}{2m}.$$

It is customary and advisable to have the solvent in the reference cell, hence $(m - n_o)$ is a very small fraction, like Δn and α_o . Since in this theory we have no use for second-degree terms in (21), we can omit the two terms containing $(m - n_o)$ as a factor, and thus get

$$(22) \quad \Delta x = ra\delta_o + \frac{a^2 n'_o (2r - 1)}{2m}.$$

The Optical Path Lengths Outside the Cell. — These are represented by the first, third, and fourth terms in equation (4). We will start with the third term, which by obvious methods can be brought into the form

$$(23) \quad \frac{ma(r-1)}{\cos \delta_a} = mar - ma + \frac{ma(r-1)\delta_o^2}{2} + \\ + a^2\delta_o(r-1)n'_o - \frac{a^3(r-1)n'^2_o}{2m}.$$

In the two square root terms ($p - ra$) and p , respectively, are placed outside the square root signs, and the resulting factors of the type $\sqrt{1 + \varepsilon}$ are written as their first-order approximations of the type $(1 + \varepsilon/2)$. With the use of equation (2), this results in

$$(24) \quad m(p - ra)(1 + \delta_o^2/2) - mp - \frac{m(\bar{x} - b)^2}{2p}.$$

At this stage, it is advantageous to write $(\bar{x} - b)$ as $\Delta x + (x_o - b)$ and to treat $(x_o - b)$ as an entity. After developing the square, the Δx^2 term, containing δ_o and an'_o in the second degree, appears in addition with the factor a/p . Since p is always much greater than a , we can regard this factor as one of the same order of magnitude as δ_o and an'_o and discard the whole term as being one of the third degree. Then there remains

$$(25) \quad m(p - ra)(1 + \delta_o^2/2) - mp - \\ \frac{m(x_o - b)^2}{2p} - \frac{m\Delta x(x_o - b)}{p}.$$

Since $(x_o - b) = (p - ra)\delta_o$, this expression can be transformed to

$$(26) \quad -mra + \frac{mra\delta_o^2}{2} - m\delta_o\Delta x$$

where two terms of the third degree have again been omitted. Insertion of the value of x according to (22) finally gives

$$(27) \quad m\sqrt{(x-b)^2 + (p-ra)^2} - m\sqrt{(\bar{x}-b)^2 + p^2} = \\ = -mra - \frac{mra\delta_o^2}{2} - \frac{a^2\delta_o n'_o(2r-1)}{2}.$$

The Total Path Difference. — By adding the equations (16) (where δ_o is introduced instead of α_o), (23), and (27), we now obtain the following expression for the total path difference between the two interfering rays :

$$(28) \quad \Delta S = a(n_o - m) + \frac{a^2\delta_o n}{2} + \frac{a^3n'^2_o(3r-1)}{6m} + \\ + \frac{ma\delta_o^2(m-n_o)}{2n_o} + \frac{a^2\delta_o n'_o(m-n_o)}{n_o} + \frac{a^3n'^2_o(m-n_o)}{3mn_o}.$$

The last three terms, however, containing the very small factor $(m - n_o)$, are negligible in comparison with the other ones. Hence this equation can be abbreviated to

$$(28) \quad \Delta S = a(n_o - m) + \frac{a^2\delta_o n_o}{2} + \frac{a^3n'^2_o(3r-1)}{6m}.$$

This is still not our final equation. We must remember

that n_o and n'_o stand for $n(x_o)$ and $n'(x_o)$, respectively, and that we now have to replace x_o by \bar{x} . This is simple, however, since we have already equation (22). A coordinate transformation $x_o = \bar{x} - \Delta x$ is all that is required. It is carried out according to the equation

$$(29) \quad n_o = n(x_o) = n(\bar{x} - \Delta x) = n(\bar{x}) - \Delta x n'(\bar{x}) = \\ = \bar{n} - \Delta x \bar{n}'$$

where, again, abbreviated symbols \bar{n} and \bar{n}' are introduced. This value of n_o is introduced into the main term in (28), the value of Δx being taken from (22). In the two correction terms, n_o and n'_o can simply be replaced by \bar{n} and \bar{n}' , respectively, since the coordinate transformation carried out on these terms only gives rise to terms of a smaller order of magnitude, not taken into account in this theory. The result of this coordinate transformation is

$$(30) \quad \Delta S = a(\bar{n} - m) + a^2\delta_o \bar{n}' \left(\frac{1}{2} - r \right) + \frac{a^3 \bar{n}'^2}{2m} \left(\frac{2}{3} - r \right)$$

which is our final equation.

From this equation we see that there may be reason to choose $r = 1/2$ or $2/3$, but there is no point in making r greater than unity, as was done for simplicity in figure 2. Consequently, now is the proper time for getting rid of the assumption that the medium of refractive index m extends throughout the whole optical system. If we instead assume that this medium is present in the reference cell only and that the space around the cell has a refractive index of unity, $m\delta_o$ in (30) has to be replaced by δ_o and the equation takes the form

$$(31) \quad \Delta S = a(\bar{n} - m) + \frac{a^2\delta_o \bar{n}'(1-2r)}{2m} + \frac{a^3 \bar{n}'^2(2-3r)}{6m}.$$

Equation (2) retains its validity if it is agreed that p means optical distance instead of geometrical distance.

Blurring and Displacement of Fringes. — The two aberrations thus derived have different character. If a vertically extended light source is used, δ_o acquires different values for each x coordinate. The first aberration term, containing δ_o in the first power, will therefore show up as a blurring of those fringes for which \bar{n}' does not vanish. If $\delta_o = 0$ for the centre of this extended light source, this term does not cause any displacement of the fringes. The second aberration is independent of δ_o and does consequently not cause blurring, but instead it gives rise to a displacement of the fringes proportional to \bar{n}'^2 .

Light Source without Vertical Extension. — In this case — a pinhole or a horizontal slit as the light source — the angle δ_o has just one value for each \bar{x} coordinate. It is then possible, by a proper choice of the value of the parameter r , to cause either of the two aberrations to disappear. On focusing the camera on the middle of the cell, the first aberration term drops out, and if a plane situated $1/3$ of the cell thickness

from the front wall is brought into focus, we get rid of the second aberration. Now, the first aberration can be eliminated independently by making $\delta_0 = 0$, and this is already one reason for choosing $r = 2/3$, but we are going to see that there are still stronger reasons.

We will now introduce two new parameters pertaining to the light source, namely

$$(32) \quad k = 1/p,$$

$$(33) \quad \varphi = b/p;$$

k is then recognized as a convergence parameter, positive values indicating divergent, negative values convergent, and $k = 0$ parallel light through the cell. The parameter φ may be called the asymmetry parameter since it furnishes a quantitative measure of the off-axis position of the (centre of the) light source.

Let us now first assume that we are using parallel light through the cell, *i. e.* that the light source is situated in the focal plane of a lens. We then have $k = 0$ and $\delta_0 = \varphi$. We will then carry out the following coordinate transformation

$$(34) \quad \bar{x} = x - \frac{\varphi a}{m} \left(\frac{1}{2} - r \right).$$

We then get

$$(35) \quad \bar{an} = an(\bar{x}) = an(x) - \frac{\varphi a^2 n'(x)}{m} \left(\frac{1}{2} - r \right) = \\ = an - \frac{\varphi a^2 n'}{m} \left(\frac{1}{2} - r \right)$$

where n and n' are now abbreviated symbols standing for $n(x)$ and $n'(x)$, respectively. If this is introduced into (31), the first aberration term disappears, and we have

$$(36) \quad \Delta S = a(n - m) + \frac{a^3 n'^2 (2 - 3r)}{6m}.$$

Consequently it is possible to eliminate the first aberration without making $\delta_0 = 0$, and by putting $r = 2/3$, we can get rid of the second aberration also.

Since a , φ , and r are constant throughout an experiment, the coordinate transformation (34) corresponds physically to a shift of the reference point on the cell axis. However, only differences in, and not absolute values of the cell coordinates are of interest in experimental work. Hence the coordinate transformation (34) can be completely disregarded in the evaluation of the interferograms. The mathematical operation leading to (36), however, shows that, in the case of a pin-hole or a horizontal slit standing in the focal plane of a lens, the first aberration in equation (31) is only apparent and without any effect on the physico-chemical measurements.

Second, let us assume that we are using an optical arrangement with diverging or converging light through the cell ($k \neq 0$). Even with $r = 2/3$, then, one aberration term remains in our expression for the path difference

$$(37) \quad \Delta S = a(n - m) - \frac{kxa^2 n'}{6m}.$$

Evidently, we can get rid of this aberration also by a similar coordinate transformation

$$(38) \quad x \rightarrow x + \frac{kxa}{6m} = x \left(1 + \frac{ka}{6m} \right)$$

but in this case the transformation has to be taken into account in the evaluation of the interferograms. The coordinate transformation (38) corresponds to a change in the scale of the cell axis or, in other words, to a change in the optical magnification factor of the cell. Since k , r , and a are numerically known apparatus constants, it is possible to calculate the transformation (38) numerically and to incorporate it into the experimentally determined magnification factor from the plane $z = ra$ to the plate. The convergence aberration in (37) may also be eliminated directly in the experimental determination of the cell magnification. A magnification factor is generally understood as the ratio between the sizes of image and object when they lie in conjugate image planes. However, an image of good definition may also be obtained of a slightly defocused object if the relative aperture of the optical system is not too large. The magnification of such a defocused object depends upon the position of the stop in relation to the object. It is easily realized that a magnification factor experimentally determined from the middle of the cell, in spite of the fact that the plane $z = 2a/3$ is in focus, automatically takes care of the coordinate transformation (38) and thus eliminates the convergence aberration in (37).

The conclusion to be drawn from these considerations is that both second-order aberrations disappear if a plane $1/3$ of the cell thickness from the front wall is brought into focus by the camera, and if the cell magnification factor is experimentally determined by placing the object in the slightly defocused middle plane of the cell.

Vertically Extended Light Source. — Let us now assume that the angles δ_0 and φ refer to the centre of this extended source. Every x coordinate will then receive pencils with angles of incidence lying within a certain interval $\delta_0 \pm \epsilon$. The two coordinate transformations described above will then remove the $a^2 \delta_0$ aberration for the centre of this interval, but aberrations of the type

$$(39) \quad \frac{\theta \epsilon a^2 n' (1 - 2r)}{2m},$$

where θ assumes all values between -1 and $+1$, remain for each x coordinate. Since for each value of θ , there is another one of the same size but of opposite sign, this aberration does not give rise to any shift in the position of the fringes, but only to blurring of them. This conclusion was drawn already on p. 29 for the case of $\delta_0 = 0$ for the centre of the extended light source. Now, after the coordinate transformations have been carried out, it has been found to hold under all circumstances.

Only when an extended light source is used is there

a real controversy between focusing the camera on the middle of the cell and on the plane defined by $r = 2/3$. When the first aberration reaches the value of one wave-length, the blurring is complete, and reading of the fringes is impossible. This occurs for ϵ values satisfying the equation

$$(40) \quad \frac{\epsilon a^2 n' (1 - 2r)}{m} = \lambda.$$

From this equation, it is possible to compute the critical angle, 2ϵ , which the light source may occupy when viewed from the cell without the fringes being completely blurred. Such data are given in Table 1 for different values of the cell thickness and the first derivative of the refractive index function. For greater convenience, the data are given in terms of a and an' .

Recalling that the table gives the figures for complete blurring and that it is possible to detect even a slight blurring, we find that the existence of the blurring aberration offers an excellent means of sharp-focusing on the middle of the cell. Actually, it is possible by observing a very sharp boundary in a 5 cm cell to localize the conjugate plane of the plate to within a fraction of a mm.

TABLE 1

Critical angular extension of the light source when viewed from the cell, for $r = 2/3$ and for different values of the cell thickness and the refractive index gradient.

an'	1.0	1.5	2.0	2.5	5.0	10.0
0.002	0.2184	0.1456	0.1092	0.0874	0.0437	0.0218
0.004	0.1092	0.0728	0.0546	0.0437	0.0218	0.0109
0.006	0.0728	0.0485	0.0364	0.0291	0.0145	0.0073
0.008	0.0546	0.0364	0.0273	0.0218	0.0109	0.0055
0.010	0.0437	0.0291	0.0218	0.0175	0.0087	0.0044
0.012	0.0364	0.0242	0.0182	0.0145	0.0072	0.0036
0.014	0.0312	0.0208	0.0156	0.0125	0.0062	0.0031
0.016	0.0273	0.0182	0.0136	0.0109	0.0055	0.0027
0.018	0.0243	0.0162	0.0121	0.0097	0.0049	0.0021
0.020	0.0218	0.0146	0.0109	0.0087	0.0044	0.0022
0.022	0.0198	0.0132	0.0099	0.0079	0.0040	0.0020
0.024	0.0182	0.0121	0.0091	0.0072	0.0036	0.0018
0.026	0.0168	0.0112	0.0084	0.0067	0.0034	0.0017
0.028	0.0156	0.0104	0.0078	0.0063	0.0031	0.0015
0.030	0.0146	0.0097	0.0073	0.0058	0.0029	0.0014

It is probable that this method would prove to be of value in different connections in the optical technique when a high accuracy in the localization of a conjugate image plane is necessary, as e. g. in the adjustment of optical instruments and for experimental measurement of the field curvature of photographic objectives.

After having accurately focused on the middle of the cell, it is very simple to focus on the plane defined by $r = 2/3$ with the same precision. One only has to shift the cell a distance of $1/6$ of the cell thickness along the optical axis in the direction from the camera. If one does, the displacement error will disappear, and the resulting blurring can be reduced as much as necessary by reducing the vertical extension of the light source.

The Displacement Aberration. — When it is desired to study the very first period in a diffusion process, where $n'(x)$ is both very great and rapidly changing, it may be necessary to focus on the middle of the cell in order to obtain sharp fringes in a photograph. The displacement aberration then remains, and it is necessary to apply a correction for it. Putting $r = 1/2$, we then have

$$(41) \quad \Delta S = a(n - m) + \frac{a^3 n'^2}{12m}.$$

This aberration is by no means negligible when interferometric methods are concerned. This fact is evident from Table 2, where the displacement has been calculated in terms of wave-lengths of the green mercury line ($\lambda = 5461 \text{ \AA}$), for $r = 1/2$, and for different values of the cell thickness and the refractive index gradient. Since as small displacements as 0.02λ can be measured with some reproducibility, it is quite clear that this aberration can seldom be disregarded. However, it should be pointed out that it has no influence on the total number of fringes, and not on the maximum derivative. Consequently, a diffusion coefficient calculated by the height-area method is not influenced by this aberration.

TABLE 2

Displacement aberration in units of wave-lengths of the green mercury line for $r = 1/2$, for $m = 4/3$, and for different values of the cell thickness and the refractive index gradient.

an'	1.0	1.5	2.0	2.5	5.0	10.0
0.002	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.05
0.004	0.02	0.03	0.04	0.05	0.09	0.18
0.006	0.04	0.06	0.08	0.10	0.21	0.41
0.008	0.07	0.11	0.15	0.18	0.37	0.73
0.010	0.11	0.17	0.23	0.29	0.57	1.14
0.012	0.16	0.25	0.33	0.41	0.82	1.65
0.014	0.22	0.34	0.45	0.56	1.12	2.24
0.016	0.29	0.44	0.59	0.73	1.46	2.93
0.018	0.37	0.54	0.74	0.93	1.85	3.71
0.020	0.46	0.69	0.92	1.14	2.29	4.58
0.022	0.55	0.83	1.11	1.38	2.77	5.54
0.024	0.66	0.99	1.32	1.65	3.30	6.59
0.026	0.77	1.16	1.55	1.93	3.87	7.74
0.028	0.90	1.35	1.79	2.24	4.49	8.97
0.030	1.03	1.55	2.06	2.58	5.15	10.30

In order to compare this aberration with the WIENER skewness of the gradient curve, we must differentiate equation (41) with respect to x , the derivative of the optical path length being equal to the angular deflection of the light beam

$$(42) \quad \delta_a - \delta_o = an' + \frac{a^3 n''}{6m}.$$

Putting this expression equal to $an'(x + \Delta x)$ and calculating the value of Δx , we find

$$(43) \quad \Delta x = \frac{a^2 n'}{6m}$$

which is to be compared with the skewness given by WIENER

$$(44) \quad \Delta x = \frac{a^2 n'}{8n} .$$

The discrepancy between (43) and (44) (the difference between m and n can be disregarded) seems to be hidden in WIENER's undeclared assumption that the angular deflection which the light pencil suffers on passage through the cell is representative of that cell coordinate which the pencil itself has on its passage through the middle of the cell. This mistake is very similar to the assumption which the author [19] made in his previous study of these questions, *viz.* that the plate coordinate to which the camera objective will project the pencil is the one corresponding to the cell coordinate at which the pencil itself passes the conjugate image plane of the plate. This assumption was geometric-optically unsound and led to the erroneous conclusion that the skewness of the gradient curve vanishes for $r = 1 - 1/\sqrt{3}$.

Discussion. — This analysis has shown that it is possible to eliminate all second-order aberrations in interferometric measurements of refractive index measurements by making use of certain experimental arrangements and procedures which can be carried out very conveniently. Thereby these methods have been given a very solid theoretical foundation.

The results also apply to the *Schlieren*-optical methods since the angular deflection of a wave-front is the first derivative of the optical path length with respect to the cell axis coordinate. However, due to the lower accuracy obtainable with these methods, the errors discussed in this article are seldom of importance. The results do not apply to the scale method without certain modifications since there the scale, and not the cell, is the conjugate image plane of the plate.

This investigation has naturally its greatest significance in diffusion measurements since in that field all precision that possibly can be reached is required. The most pertinent problem in diffusion just now is the interpretation of diffusion experiments where polydispersity or a concentration dependence of the diffusion coefficient plays a role. By carrying out measurements at very small concentration differences, the concentration dependence can be disregarded and the effect of polydispersity studied separately. A smaller concentration difference, however, requires a correspondingly thicker cell to retain the accuracy in the diffusion coefficient, and the aberrations discussed in this article have been found to increase as the square and cube of the cell thickness. In addition, when an investigation of polydispersity or concentration dependence is concerned, one has to measure small deviations of the refractive index function from the shape demand-

ded by the laws of ideal diffusion. A thorough knowledge of the distortions of the diffusion boundary is then, of course, necessary in order to avoid misinterpretations of the experimental results. A concentration-dependent diffusion coefficient is known to give rise to skew gradient curves. In this article we have seen that there is an optical aberration which also gives rise to skewness of the gradient curve. It is necessary not to interpret this skewness as originating from the substance under investigation. Polydispersity, on the other hand, is known to cause a higher gradient curve than the normal curve of error. There is an optical distortion that gives rise to a flattening of the gradient curve, although this aberration has not been treated in this article. If this aberration is not considered, an experimental curve could easily be interpreted to indicate a lower degree of polydispersity than that actually possessed by the material.

Since it proved possible to get rid of all second-order aberrations, this treatment has not revealed the ultimate limit in the use of interferometry for diffusion measurements. An extension of the investigation to third-degree terms will be necessary for that purpose.

The optical aberrations of the lens system add to those derived here. If, for instance, there is a curvature of field, the value of the parameter r will be a function of the cell coordinate. If there is optical distortion, the magnification factor of the cell will also be such a function.

This investigation is part of a research program for the development of improved methods of optical analysis of stationary and flowing liquids, which program is generously supported by the *Swedish Technical Research Council*.

REFERENCES

- [1] H. LABHART & H. STAUB, *Helv. Chim. Acta*, t. **30**, 1947, p. 1954.
- [2] W. LOTMAR, *Helv. Chim. Acta*, t. **32**, 1949, p. 1847.
- [3] H. J. ANTWEILER, *Kolloid-Z.*, t. **115**, 1949, p. 130.
- [4] H. J. ANTWEILER, *Mikrochemie ver. m. Mikrochim. Acta*, t. **36-37**, 1951, p. 561.
- [5] E. CALVET, *Compt. Rend. Acad. Sci.*, t. **220**, 1945, p. 597.
- [6] E. CALVET, *Compt. Rend. Acad. Sci.*, t. **221**, 1945, p. 403.
- [7] E. CALVET & R. CHEVALERIAS, *Journ. Chim. phys.*, t. **43**, 1946, p. 37.
- [8] J. ST. L. PHILPOT & G. H. COOK, *Research*, t. **1**, 1948, p. 234.
- [9] L. G. LONGSWORTH, *Rev. sci. Instr.*, t. **21**, 1950, p. 524.
- [10] L. G. LONGSWORTH, *Anal. Chem.*, t. **23**, 1951, p. 346.
- [11] H. RÖGENER, *Kolloid-Z.*, t. **118**, 1950, p. 10.
- [12] H. SVENSSON, *Acta Chem. Scand.*, t. **3**, 1949, p. 1170.
- [13] H. SVENSSON, *Acta Chem. Scand.*, t. **4**, 1950, p. 399.
- [14] H. SVENSSON, *Acta Chem. Scand.*, t. **4**, 1950, p. 1329.
- [15] H. SVENSSON, *Acta Chem. Scand.*, t. **5**, 1951, p. 72.
- [16] H. SVENSSON, *Acta Chem. Scand.*, t. **5**, 1951, p. 1301.
- [17] O. WIENER, *Ann. Phys. Chem., N. F.*, t. **49**, 1893, p. 105.
- [18] H. SVENSSON, *Kolloid-Z.*, t. **90**, 1940, p. 141.
- [19] H. SVENSSON, *Ark. Kem. Min. Geol.*, t. **22 A**, 1946, no 10.
- [20] L. G. LONGSWORTH, *Ind. Eng. Chem., Anal. Ed.*, t. **18**, 1946, p. 219.

Une méthode permettant d'améliorer le pouvoir séparateur des instruments d'optique

par P. LACOMME
Institut d'Optique, Paris.

SOMMAIRE. — *Un objectif stigmatique sépare 2 étoiles quand la variation de différence de phase des vibrations parvenant aux bords extrêmes de la pupille est suffisante lorsqu'on passe d'une étoile à l'autre.*

Il est possible d'augmenter artificiellement cette différence de phase en absorbant, au moyen d'un écran opaque, une partie de l'image, que l'on reprend ensuite par un second système ; on modifie ainsi la répartition des amplitudes et des phases dans l'image finale ; et les 2 étoiles paraîtront plus écartées que ne l'indiquerait l'optique géométrique. Le procédé peut être appliqué en particulier à l'amélioration du pouvoir séparateur des lunettes astronomiques et des spectrographes.

ZUSAMMENFASSUNG. — Ein punktförmig abbildendes Objektiv trennt zwei Sterne, wenn der Unterschied der Phasendifferenz zwischen den Erregungen, die vom äussersten Rand der Pupille ausgehen, beim Übergang von dem einen zum anderen Stern genügend gross ist. Es gelingt, diese Phasendifferenzen künstlich zu vergrössern, wenn man einen Teil des Bildes mittels eines undurchsichtigen Schirms abdeckt und den Rest durch ein zweites System noch einmal abbildet. Man verändert dadurch die Amplituden und Phasen in dem endgültigen Bild. Die beiden Sterne erscheinen in grösserem Abstand von einander als es der geometrischen Optik entspricht. Dieser Vorschlag lässt sich zur Verbesserung des Auflösungsvermögens der astronomischen Fernrohre und Spektrographen benutzen.

SUMMARY. — A stigmatic objective separates two stars when the variation of phase difference of vibrations arriving at the extreme edges of the pupil is sufficient, on passing from one star to the other. It is possible artificially to increase this phase difference by absorbing, by means of an opaque screen, part of the image, which is then reimaged by a second system. The distribution of amplitude and phase in the final image is thus modified : two stars appear more separated than geometrical optics would indicate.

The procedure can be applied to improving the resolving power of astronomical telescopes and of spectrographs.

Quand on considère 2 points lumineux sur fond noir, incohérents et de même intensité, la théorie classique du pouvoir séparateur conduit à adopter, pour limite de résolution angulaire d'un objectif de lunette de diamètre a , la valeur

$$\theta = \frac{1,22 \lambda}{a},$$

λ étant la longueur d'onde de la lumière supposée monochromatique.

Les 2 étoiles à la limite de séparation envoient sur l'objectif 2 surfaces d'ondes planes S_1 et S_2 faisant entre

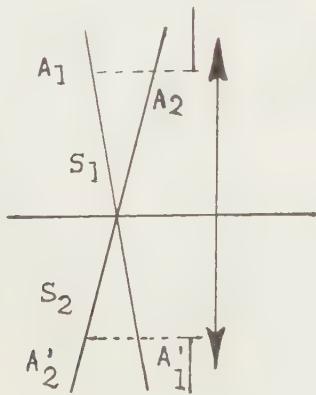


FIG. 1.

elles un angle θ ; dans une section par le plan méridien contenant les 2 étoiles on aura (fig. 1)

$$A_1 A_2 + A'_1 A'_2 = a \cdot \theta = 1,22 \lambda.$$

Si la pupille était rectangulaire, nous aurions exactement λ . On en conclut que, quand les 2 points sont

séparés, c'est-à-dire quand le centre de la tache de diffraction produite par le premier coïncide avec le premier minimum nul de l'image de l'autre, on peut dire :

1^o les différences de marche entre les vibrations parvenant aux bords extrêmes de la pupille de l'instrument diffèrent, pour les 2 images, d'environ une longueur d'onde, ou encore la variation de différence de phase, entre ces vibrations, est de l'ordre de 2π .

2^o Inversement, si cette condition est remplie, les 2 points sont séparés (si l'objectif est de bonne qualité, naturellement).

Nous allons étudier une possibilité d'amplifier artificiellement jusqu'aux environs de 2π une différence de phase plus faible, augmentant ainsi le pouvoir séparateur.

Possibilité d'une amplification de Phase. — L'étude du contraste de phase montre que l'on peut, dans certaines conditions, considérer une vibration légèrement déphasée par rapport à une vibration origine comme la somme d'une vibration « en phase » et d'une petite vibration en quadrature, responsable du déphasage. On peut penser, pour augmenter le déphasage, à absorber la vibration principale « en phase », sans toucher à la seconde. On peut ainsi, au prix d'une perte d'énergie, améliorer le pouvoir séparateur. Voyons maintenant le principe plus en détails.

Disposons, dans le plan focal de l'objectif L_1 (fig. 2) dont nous nous proposons d'améliorer le pouvoir séparateur, un écran E (filiforme si la pupille P_1 est rectangulaire, rond ou filiforme si elle est circulaire) et plaçons E de façon à ce qu'il absorbe une partie du maximum central de la tache de diffraction correspondant à



FIG. 2.

l'onde Σ reçue d'une étoile A. Reprenons l'image A' par un véhicule L₂ qui en donne une image définitive A'' tandis que L est un verre de champ destiné à conjuger les pupilles P₁ et P₂ de L₁ et L₂.

Prenons comme surface de référence, pour les vibrations arrivant sur le véhicule L₂, une sphère S centrée sur O ; si l'écran E n'existe pas, la surface d'onde arrivant sur P₂ serait une sphère S' de centre A' ; c'est dire que la vibration en un point M de la surface de référence S serait un vecteur \vec{R} , d'amplitude constante mais dont la phase varie linéairement entre les limites B et B' (fig. 3).

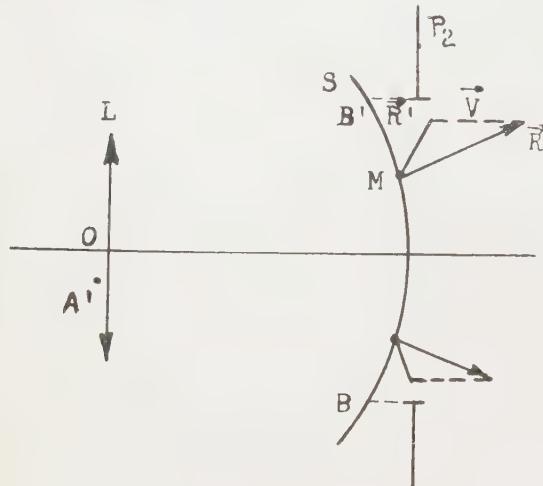


FIG. 3.

Amenons l'écran E en O ; pour obtenir la vibration sur S, il faut alors retrancher de \vec{R} la vibration que diffracterait un point lumineux situé en O. Comme celui-ci est au centre de la sphère S de référence, cette vibration est représentée par un vecteur \vec{V} de phase constante sur la surface de S. La vibration sur S devient un vecteur

$$\vec{R}' = \vec{R} - \vec{V}$$

et l'on constate immédiatement que la phase de \vec{R}' varie plus rapidement que celle de \vec{R} quand on se déplace sur S. On peut ainsi amplifier la différence de phase jusqu'à obtenir des valeurs de l'ordre de $+ \pi/2$ en B, $- \pi/2$ en B' pour l'un des points objets et les valeurs symétriques pour l'autre ; ainsi la différence de phase de 2π sera atteinte et la séparation pourra être obtenue.

La surface d'onde n'est plus sphérique exactement puisque la phase de \vec{R}' ne varie pas linéairement avec

la position sur S mais les aberrations de l'image ainsi introduites sont pratiquement négligeables si l'on reste dans certaines limites pour la largeur de l'écran ; l'amplification de phase introduit une distorsion locale au voisinage du fil : si l'objet A parcourt le champ d'un mouvement uniforme, le mouvement de l'image A'' sera retardé, puis accéléré, au moment où A' franchit le fil. On peut ainsi arriver à séparer 2 points qui ne le seraient pas normalement, en bissectant avec E le phénomène de diffraction qu'ils produisent ; cette amélioration ne s'obtient en fait qu'au prix d'une perte d'énergie.

Calcul de l'image finale. — Soient P₁ et P₂ les pupilles de l'objectif et du véhicule (fig. 4), I₁ le plan

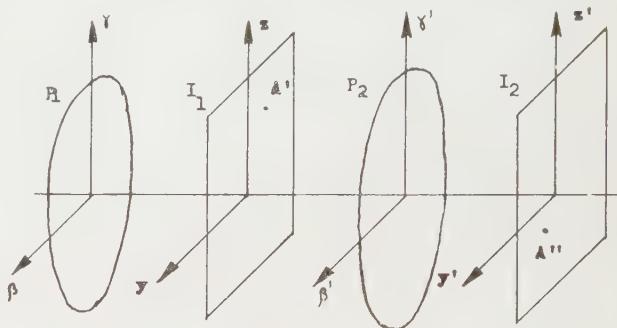


FIG. 4.

de l'image fournie par l'objectif, I₂ celui de l'image définitive. Prenons des axes rectangulaires dans chacun de ces plans ; avec des unités de longueur convenables, nous avons dans le plan de P₁, une amplitude

$$F_1(\beta, \gamma)$$

et, dans le plan I₁, une amplitude $A_1(y, z)$

$$A_1(y, z) = T [F_1(\beta, \gamma)]$$

en désignant par $T [F_1(\beta, \gamma)]$ la transformée de Fourier de $F_1(\beta, \gamma)$.

Pour tenir compte de la présence de l'écran E dans ce plan, il convient de multiplier $A_1(y, z)$ par une fonction

$$C(y, z)$$

qui représente la transparence de l'écran.

Si ce dernier est opaque, cette fonction est nulle sur sa surface et égale à 1 partout ailleurs. E peut d'ailleurs modifier la phase ou l'amplitude, ou à la fois l'amplitude et la phase de la première image.

$C(y, z)$ peut être considéré comme la transformée de Fourier d'une certaine fonction $\Gamma(\beta, \gamma)$; comme l'a alors montré Mr Duffieux (l'Intégrale de Fourier et ses applications à l'Optique), on a une amplitude

dans le plan P₂ (en posant $K = \frac{2\pi}{\lambda}$)

$$F_2(\beta', \gamma') = \iint A(y, z) C(z, y) e^{+j K(\beta' y + \gamma' z)} dy dz$$

ou encore

$$F_2(\beta', \gamma') = \iint F_1(\beta, \gamma) \Gamma(\beta' - \beta, \gamma' - \gamma) d\beta d\gamma.$$

L'image finale A_2 est la transformée de Fourier de F_1 et s'écrit

$$A_2(y', z') = \iint_{-\infty}^{+\infty} [A_1 - C] A_1(y - y, z - z) dy dz$$

ou, en appelant $C'(y, z)$ l'écran complémentaire de $C(y, z)$,

$$A_2(y', z') = \iint_{-\infty}^{+\infty} A(y, z) A(y - y, z - z) dy dz' - \iint_{-\infty}^{+\infty} A \cdot C'(y, z) A(y - y, z - z) dy dz'$$

le premier terme est la tache d'Airy fournie par l'instrument normal, le deuxième représente l'absorption par l'écran E.

Gain en pouvoir séparateur et perte de clarté. — Le gain en pouvoir séparateur est donné, en première approximation, par l'amplification de phase obtenue ; pour de faibles différences de phase, il faut évidemment affaiblir G fois la vibration diffractée par le maximum central pour amplifier G fois la phase de la résultante \vec{R} .

Pour la pupille circulaire, où le maximum central contient 84 % de l'énergie, il faut donc s'attendre à

perdre environ $0,84(1 - \frac{1}{G^2})$ du flux lumineux, soit

80 % environ pour un gain de 4.

On pourrait éviter cette perte d'énergie en utilisant, au lieu d'un écran opaque, un écran déphasant ; la vibration \vec{V} est remplacée alors par un vecteur $K\vec{V}$, et un vecteur en opposition $(1 - K)\vec{V}$; leur résultante peut être rendue aussi petite que l'on veut. Mais ce qui compte n'est pas tant la perte de flux que la baisse du maximum central de l'image finale, qui ne dépend que du gain obtenu en pouvoir séparateur. Finalement, ce procédé ne paraît pas plus avantageux.

On ne peut utiliser un écran très large pour avoir un gain très élevé, parce que les aberrations introduites finiraient par dédoubler l'image d'un seul point.

Bien entendu, l'image A'' n'est ainsi modifiée que lorsque A' est sur l'écran E ; pour ne pas altérer la clarté et le pouvoir séparateur de la lunette dans le reste du champ, il suffit que la pupille P_2 du véhicule L_2 soit au moins égale à l'image de P_1 que le verre de champ donne dans son plan. Expérimentalement, les meilleurs résultats ont été obtenus en conjuguant exactement les 2 pupilles et en choisissant ensuite le plus grand diamètre d'écran pour lequel l'image d'une source ponctuelle n'est pas dédoublée : si l'objectif L_1 est ouvert à F/N , on peut alors utiliser un fil de diamètre au plus égal à $N/2$ microns, du moins pour les longueurs d'ondes voisines du maximum de sensibilité de l'œil.

Dispositif expérimental. — On a utilisé soit une lampe BOLL, soit une lampe à haute pression HBO 107-36. Un condenseur de microscope C donne une

image réelle de la lampe sur un trou-source S percé dans une feuille de clinquant (fig. 5).

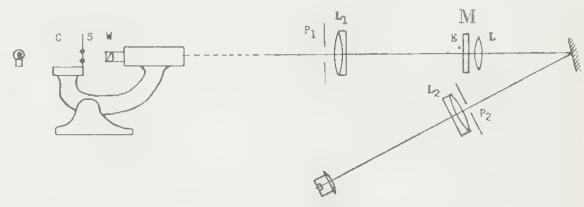


FIG. 5.

Le microscope sert seulement de banc d'optique ; son objectif est remplacé par un prisme de WOLLASTON biréfringent W dont la distance à S, réglable, permet d'obtenir pour les 2 images de la source, incohérentes entre elles, la distance angulaire voulue.

A 3 m environ, un objectif de CLAIRAUT $f = .60$ cm, diaphragmé, donne des 2 sources une image dans le plan d'un micromètre M portant un fil de cuivre de diamètre 0,05 mm. Le véhicule est un objectif de télemètre $f = 40$ cm. Un verre de lunetterie sert de verre de champ, et un oculaire $\times 10$ permet d'observer l'image définitive.

Les montures identiques de l'objectif et du véhicule portent chacune 3 vis à 120° pour le centrage des

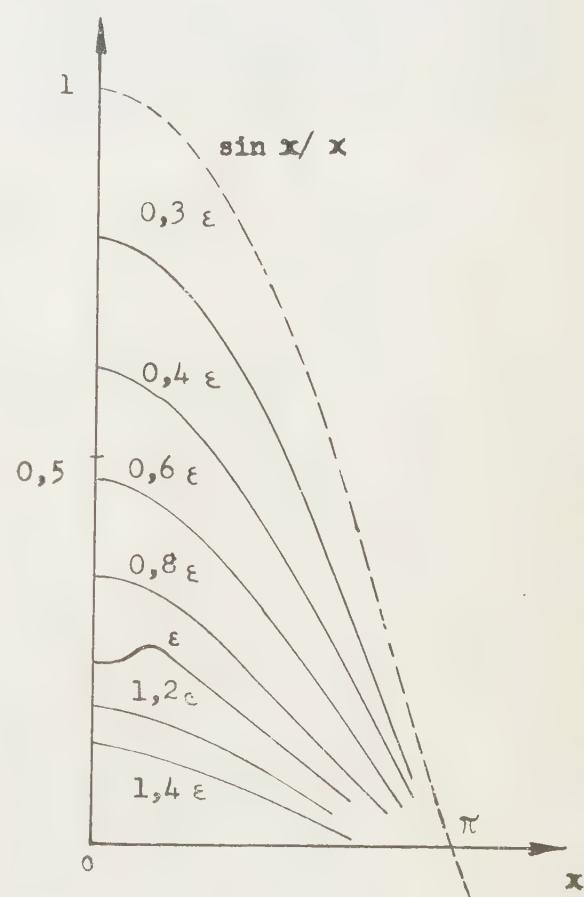
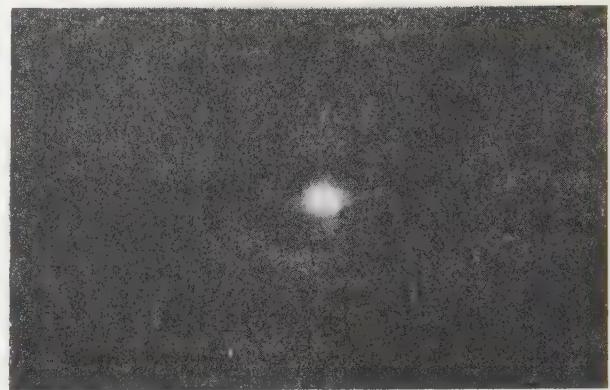


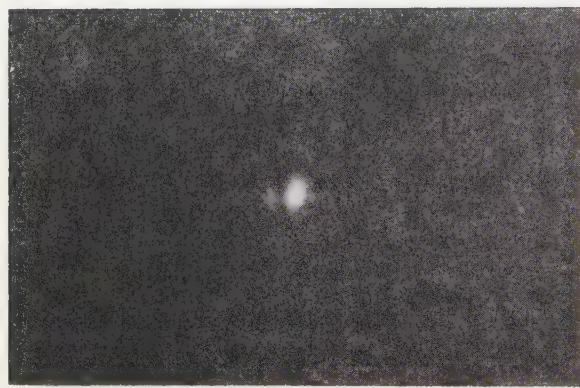
FIG. 6.



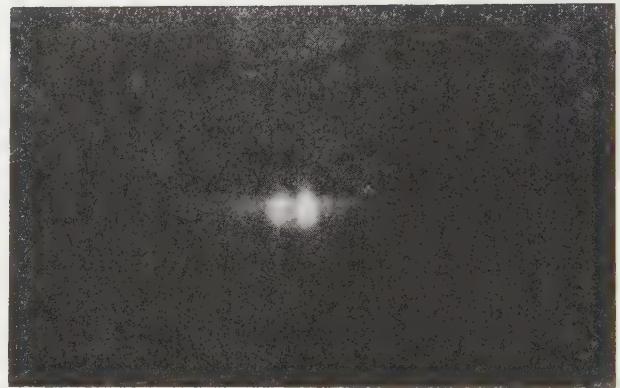
a



b



c



d

FIG. 7. — *Pupille rectangulaire :*

- a) Instrument ordinaire. 1 point.
- b) Instrument ordinaire. 2 points.
- c) Utilisation du fil. 1 point.
- d) Utilisation du fil. 2 points séparés.

pupilles, choisies dans un jeu de disques de laiton percés à des diamètres convenables. Le seul point délicat est ce centrage, le moindre décentrement de l'une de ces pupilles par rapport à l'autre faisant apparaître le fil, même sur le maximum central de l'image d'une seule source.

Après un centrage correct de P_1 et P_2 le fil n'est plus visible que dans les anneaux, du moins si sa largeur n'est pas excessive.

Pour faire varier le rapport des intensités des 2 sources, il suffit d'intercaler un polaroïd sur le faisceau. Le microscope a été muni d'une graduation pour donner, par simple lecture, la distance de la source au WOLLASTON ; le gain en pouvoir séparateur est alors le rapport de ces distances pour lesquelles, sans interposition et avec interposition de l'écran absorbant, on est à la limite de séparation.

Cas de la pupille rectangulaire. — C'est le cas des spectrographes ; si $2b$ est la largeur du fil, l'amplitude de l'image finale s'écrit :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x-x')}{x-x'} dx - \int_{a-b}^{a+b} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x-x')}{x-x'} dx$$

quand le milieu du fil coïncide avec l'image géométrique, $a = 0$ et l'on obtient

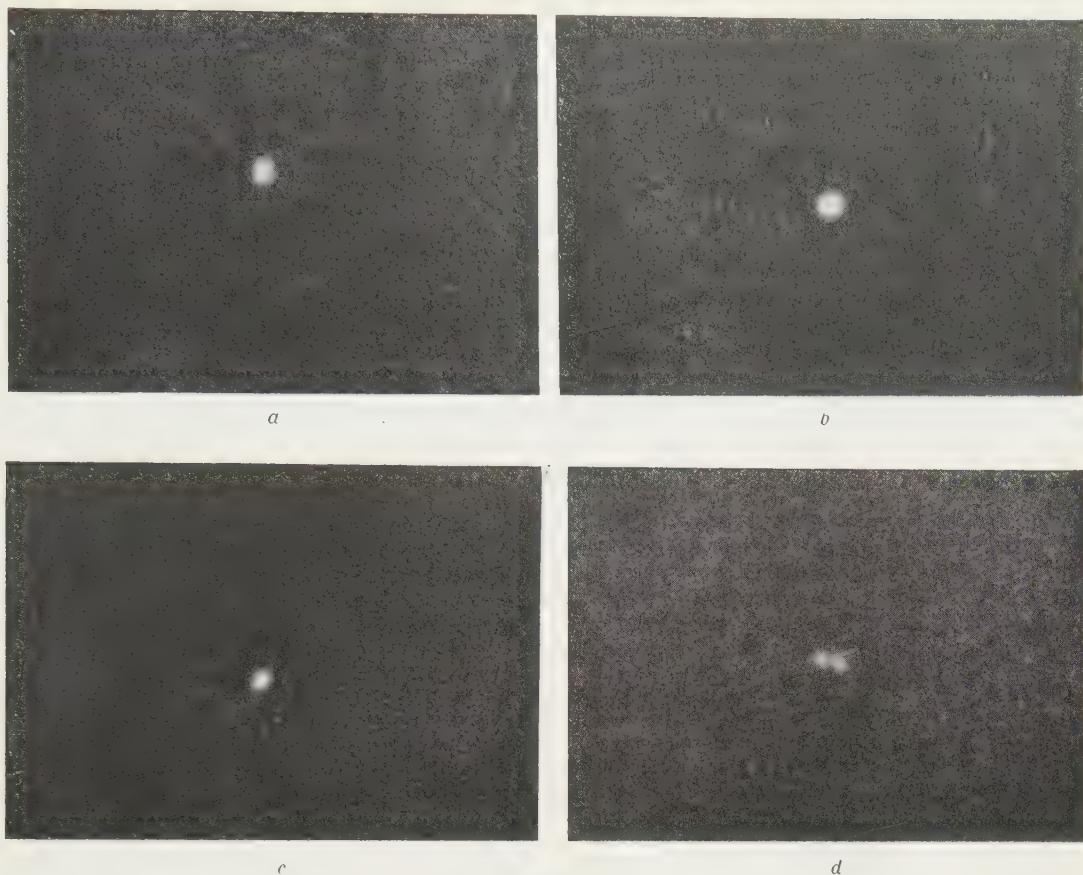
$$\pi F(x') = \frac{\sin x'}{x} \left[\pi - \text{Si } 2(b-x') - \text{Si } 2(b+x') \right] - \frac{\cos x'}{x'} \left[\text{L} \frac{b-x'}{b+x'} + \text{Ci } 2(b+x') + \text{Ci } 2(b-x') - 2 \text{Ci}(2b) \right]$$

et, au centre, $F(0) = 1 - \frac{2}{\pi} \text{Si}(2b) + \frac{2}{\pi b}$,

l'énergie absorbée par l'écran est

$$\int_{-b}^{+b} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \left[-\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \cos 2x + \text{Si } 2b \right]_{-b}^{+b}$$

Les courbes (fig. 6) donnent l'amplitude dans l'image d'un point en fonction de la largeur du fil exprimée en

FIG. 9. — *Pupille circulaire :*

- a) Instrument ordinaire, 1 point.
- b) Instrument ordinaire, 2 points.
- c) Utilisation du fil, 1 point.
- d) Utilisation du fil, 2 points.

fonction de $\epsilon = \frac{\lambda}{2 \sin u'}$, u' étant l'ouverture image de l'objectif (l'image est supposée centrée sur le fil).

On voit que si l'on dépasse 0,82, un minimum apparaît sur l'axe ; puis les maxima latéraux atteignent et dépassent, en importance, le maximum central. Au delà de 1,2 ϵ l'image est nettement dédoublée.

Pour que l'image d'un point présente un seul maximum suffisamment net, il ne faut donc pas dépasser, pour la largeur du fil, la valeur 0,8 ϵ . Le gain obtenu expérimentalement (rapport des distances angulaires des 2 sources pour lesquelles, sans et avec interposition de l'écran, on est à la limite du pouvoir séparateur) est alors de 4.

Les 4 photographies (fig. 7) représentent :

- a) une seule source, image normale ;
- b) deux sources non séparées, image normale ;
- c) une seule source, image avec interposition du fil ;
- d) deux sources, avec interposition du fil.

Cas de la pupille circulaire. — En utilisant comme écran un disque circulaire, on peut absorber en totalité le maximum central, sans que l'image d'une source

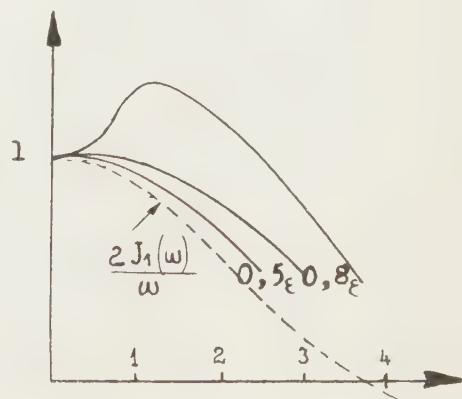


FIG. 8.

unique cesse d'être acceptable. Mais ce dispositif, d'une mise en œuvre délicate, semble inapplicable en astronomie du fait de l'agitation atmosphérique.

Aussi peut-on utiliser plutôt le fil, sur lequel l'image de l'étoile passera tout de même assez souvent ; les résultats sont alors tout à fait analogues à ceux obtenus avec la pupille rectangulaire.

Les courbes représentent l'amplitude dans l'image d'une étoile en fonction de la largeur de l'écran exprimée en fonction de $\varepsilon = \frac{0,61 \lambda}{\sin u'}$,

l'amplitude au centre étant prise égale à 1.

Les courbes (fig. 8) ont la même allure que dans le cas précédent et ici encore il ne faut pas dépasser $0,75 \varepsilon$ ou $0,8 \varepsilon$. Le gain obtenu, expérimentalement, est encore égal à 4; c'est-à-dire que le minimum de contraste perceptible correspond, lorsqu'on utilise le fil, à une distance angulaire des 2 étoiles 4 fois plus faible que celle qui donne normalement le même contraste.

Les photographies (fig. 9) représentent deux points lumineux environ 2 fois 1/2 au-dessous du pouvoir séparateur; à droite, le fil permet de les séparer, tandis que dans des conditions identiques, mais sans faire usage du fil, il n'y a naturellement aucune séparation.

Cas de 2 sources d'intensités inégales. — C'est le cas le plus fréquent en astronomie, ainsi, pour Sirius, le rapport des intensités est de l'ordre de 1 000; la formule n'a plus alors aucune valeur. A moins d'em-

ployer un instrument assez gros pour que l'astre faible soit nettement visible, on n'obtient qu'un renforcement local de l'un des anneaux de l'image de l'astre le plus brillant.

Lorsque les 2 intensités sont du même ordre de grandeur, l'amplification de phase apporte tout de même un gain en séparation, mais ce gain est plus faible. Ainsi, il passe de 3,8 à 2,3 (avec un fil de diamètre environ $2\varepsilon/3$) quand le rapport des intensités passe de 1 à 0,75.

Au delà, le critère de séparation n'est plus du tout le contraste au centre de l'image comme dans la théorie avec des sources égales; les différences de marche nécessaires sont très supérieures à une longueur d'onde; les images géométriques des 2 étoiles sont alors trop écartées pour que l'écran E puisse modifier simultanément chacune des 2 images de diffraction de façon appréciable; il affaiblit seulement celle de la plus brillante.

Ce travail a été réalisé sous la direction de Mr A. MARÉCHAL à qui nous tenons à exprimer nos bien vifs remerciements.

Manuscrit reçu le 30 avril 1953

Paraxial and third order data of corrected doublets

by A. G. S. VAN HEEL

Laboratorium voor Technische Physica, Delft

SUMMARY. — A compilation in a comprehensive form of data of corrected doublets is given as an extension of those of SMITH and MILNE [1]. Some useful paraxial values have been included and the information of third order aberration is amplified, together with formulae and values for other magnifications of object and stop. In view of the application of these data the formulae for the composition of two systems are also given.

SOMMAIRE. — On a complété un résumé très condensé de données sur les doublets corrigés de SMITH et MILNE [1] par quelques valeurs paraxiales et des données complémentaires sur les aberrations du 3^e ordre. On donne des formules et des chiffres pour diverses positions de l'objet et de la pupille, ainsi que les formules nécessaires pour l'association de deux systèmes.

ZUSAMMENFASSUNG. — Für die korrigierten Zweilinser von SMITH und MILNE [1] sind die Werte des Korrektionszustandes übersichtlich zusammengestellt und ergänzt durch die Angabe der paraxialen Größen und der Aberrationen dritter Ordnung. Für andere Objekt- und Pupillenlagen werden die Formeln und Werte angegeben sowie auch die Formeln für die Zusammensetzung zweier Systeme.

1. Introduction. — Designing optical systems, a technique which has sometimes more resemblance to an art than to a science, can always make a profitable use of data of elaborated systems, provided these are to be found in a concise and manageable form. An example is the series of doublets in STEINHEIL and VOIT's Handbuch der angewandten Optik (1893). In 1920 the aberrational data of these doublets were recalculated (with higher precision) and amplified (1). The additional data are a zonal ray, the third order coefficients, the paraxial power and the values of the spherical aberration coefficient and the power when the curvatures are unaltered but all the surfaces touch one another on the axis. With the application in view for practical designing purposes, the third order aberrational data have been further amplified, and these, together with some of the known and published numbers have been collected in the following tables.

All the doublets are corrected for objects at infinity for spherical aberration for the rim ray at an aperture of 1 : 12 and achromatized on the axis for two rays, indicated by D (the « yellow ray ») and V (the « violet ray »). The wave lengths of these might be those of the D- and H-lines in the spectrum, or indeed any other pair, provided the assumed refractive indices can be ascribed to them. The indices are for the crown lens $n_D = 1.51806$, $n_V = 1.53356$, for the flint lens $n_D = 1.61358$, $n_V = 1.64252$.

2. Description of the figures. — In each of the cases the system is drawn to scale, which is indicated by the horizontal line with length 0.1 f' , that is 0.1 of the focal length. The light is assumed to enter from the left. The position of the points with unit magnification, H and H', are indicated in the same scale. The third order primary or meridional (m) and secondary or sagittal (s) field are drawn together with the PETZVAL curvature (dashed line) with a radius corresponding to this scale. The position of these curves with reference to the system is not to scale, however,

(1) In the present paper the doublets all have a focal length +1 and thus also a paraxial power of +1. The A-series contains doublets with crown as first lens, in the B-series the crown lens is the second one.

as this would have been impracticable. The distance of the axial point of the curves from the point H' is in all cases the focal length, i. e. unity.

The chromatic correction (longitudinal axial chromatic aberration for objects at infinity) is graphically represented for the wave lengths D and V in the small rectangle with abscissae on a scale as indicated; the reader is warned that the scale is not the same for the different cases. The spherico-chromatic corrections for objects at infinity is given by the fully drawn curves for incident height 1/24 (upper side of the rectangle) and 1/36 (thin horizontal line). The deviation from the sine-condition is given in the same diagram by dashed curves. It may be recalled that the doublets all are corrected for the rim-ray for the wave length D.

The chromatic variation of magnification (the so-called lateral chromatic aberration) is given by the length of the arrow $\epsilon = (f'_V - f'_D)/f'_D$ where f'_V and f'_D are the focal lengths for the wave lengths V and D. As here $f'_D = 1$ the length of ϵ is equal to $f'_V - 1$. Positive values are measured upwards, negative values downwards. The scale of ϵ is taken so large that comparison of the different cases can be made. For that reason it was chosen ten times larger than the scale indicated by the length 0.1 f' . The position of the arrow on the axis is of course quite arbitrary; it seemed helpful to put it in a vertical direction in order to remind the reader that it refers to a lateral error.

3. Description of the tables. — The constructional data of each system are given for a focal length 1. The curvatures R_1 to R_4 of the refracting surfaces are positive when convex to the incident light; the thickness of the crown lens is t_1 , the air space t_2 , the thickness of the flint lens t_3 .

In the next column the paraxial constants, A , B , C and D are given, together with the distance l_H of the principle point H in the object space from the first vertex and the distance l'_H of principal point H' in the image space from the last vertex, both of these distances reckoned positive when the principal point is to the right of the corresponding vertex. The paraxial quantity A is the power of the system, while

$$B = 1 - Al_u, C = 1 + Al'_u,$$

and $D = l'_u - l_u + Al'_u l_u = (BC - 1)/A.$

Further aberrational values are listed in the third column; these refer all to the wave length D and to the object at infinity, while it is assumed that the entrance pupil coincides with the principal plane of the object space (the plane containing H).

3^d Sph means the longitudinal third order spherical aberration for incident height 1/36.

c gives the deviation from the sine condition; $c = f' - h/\sin u'$ with $f' = 1$ and $h = 1/24$, where u' is the angle between the emergent rim ray (in all cases positive).

R_m , R_s and R_p are the meridional, sagittal and Petzval curvatures; again a positive sign means that the surface is convex to the incident light.

sph. gives the exact longitudinal spherical aberration for incident height 1/36.

The item comac. refers to the value of the third order comatic circle in the focal plane for the zone with incident height 1/24 and a field angle of 0.1.

The third order relative distortion refers to a field angle of 1; it is the displacement of the image point in the focal plane divided by its distance from the axis. For other values ω of the field angle the third order relative distortion is proportional to ω^2 .

Lastly data are given to enable the reader to compute readily the third order aberration coefficients for other positions of the object and the stop.

4. Third order aberrations for arbitrary positions of object and stop. — Let the magnification of the object be G and that of the stop S ; we have up to now only dealt with the case $G = 0$ (object at infinity) and $S = +1$ (stop at principal plane). These quantities G and S are used by T. SMITH [2] to denote the lateral magnifications multiplied by the refractive index of the image space and divided by the refractive index of the object space. As in the case of our doublets these refractive indices both are equal to unity, G and S represent here the magnifications themselves.

The symbol J , representing the reduced power of a system (see e. g. STEWARD [3]), i. e. the paraxial power divided by the product of the refractive indices of object and image space, in our case equals the power A itself. Further we make use of the auxiliary quantities

$$\omega = G x J/(S - G), \quad \eta = S x_1 J/(S - G),$$

where x is the distance of the object from the axis

and x_1 the incident height in the plane of the entrance pupil. Together with the PETZVAL curvature R_p (the sum of the power of the refracting surfaces each divided by the product of the refractive indices before and after the surface and by) — J) the third order aberrations are completely described by the equation for meridional rays:

$$x' - Gx = \frac{1}{2} m_1 \omega^3 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 \eta + \frac{1}{2} m_3 \omega \eta^2 + \frac{1}{2} m_4 \eta^3.$$

The aberrations in the image plane depending on the field factor ω and the aperture factor η are clearly to be ascribed to distortion (m_1), meridional curvature (m_2), coma (m_3) and spherical aberration (m_4).

It is worth while to give the relations with the aberration constants often used by SMITH [1].

$$A_{Sm} = -J m_4,$$

$$B_{Sm} = -J (m_4 + 1/3 m_3),$$

$$C_{Sm} = -J (m_4 + 2/3 m_3 + 1/3 m_2) + 1/3 R_p,$$

$$B'_{Sm} = -J (m_4 + m_3 + m_2 + m_1) - 1,$$

$$A'_{Sm} = -J (m_4 + 4/3 m_3 + 2m_2 + 4m_1 - e_0) - 2.$$

It is to be noted that A_{Sm} etc. are dimensionless, while m_1 to m_4 (and e_0) are proportional to the focal length of the system.

In the tables the values of m_1 , m_2 , m_3 and m_4 are given together with e_0 , the spherical aberration of the stop, when placed at H; — e_0 fulfills the same function at the entrance pupil as m_4 at the object, and it is an indispensable datum to find the third order aberration coefficients, when the positions of object and stop are changed.

SMITH's transformation formula [2] gives with

$$d_0 = e_0 - (S - G) (S^2/G - 1)/J,$$

$$d_1 = m_1,$$

$$d_2 = -1/3 m_2,$$

$$d_3 = 1/3 m_3,$$

$$d_4 = -m_4,$$

all the necessary information. We might transform simultaneously object and stop. In practice, however, it appears to be more expedient to perform the transformation in two steps, changing first the position of the object and then of the stop, as otherwise the terms which do not contain m' 's are very complicated.

Changing the position of the object from that corresponding to $G = 0$ to a position corresponding to a magnification G' , we have with

$$(G' - G)/(S - G) = g,$$

the scheme :

	e_0	m_1	m_2	m_3	m_4	g/J
$m'_1 =$	g	$1 - g$				
$m'_2 =$	$-3 g^2$	$-6 g(1-g)$	$(1-g)^2$			$-3(S^2 - 1)(S - G)(1-g)$
$m'_3 =$	$3 g^3$	$9 g^2(1-g)$	$-3 g(1-g)^2$	$(1-g)^3$		$3 \{ (2S^2 - SG - 1)g + SG - 1 \} (S - G)(1-g)$
$m'_4 =$	$-g^4$	$-4 g^3(1-g)$	$2 g^2(1-g)^2$	$-\frac{4}{3} g(1-g)^3$	$(1-g)^4$	$Q/(S - G)^2$

with :

$$Q = 3G'(G' - G)(G - S^3) + (G^2 + 3S^2 - 3SG - 1)G'^3 + (S - G)^3 + G^3 - S^3G^2.$$

Changing then the position of the entrance pupil from the position with magnification S to a position corresponding to magnification S' , we have with

$$(S' - S)/(S - G) = s$$

the following scheme for the new values of m''_1 to m''_4 :

	m'_1	m'_2	m'_3	m'_4
$m''_1 =$	$(1 + s)^3$	$s(1 + s)^2$	$s^2(1 + s)$	s^3
$m''_2 =$		$(1 + s)^2$	$2s(1 + s)$	$3s^2$
$m''_3 =$			$1 + s$	$3s$
$m''_4 =$				1

In addition to the values of m_1 , m_2 , m_3 and m_4 for $G = 0$, and e_0 , the values of m_1 to m_4 for some other positions of the object are given, while S is kept constant at + 1.

For $G = -1$ the object is at twice the focal length f' before H and the image at $2f'$ to the right of H'. For $G = +5/6$ the object is at $f'/5$ to the right of H and the image at $f'/6$ to the right of H'.

Moreover a row for $G = +1$ has been inserted, for which $S = 0$. This gives the aberrations of the principal surfaces, when the entrance pupil is at infinity. The reader is warned that the transformation from $G = 0$, $S = +1$ to $G' = +1$, $S' = 0$ cannot be performed directly by the given formulae, as the intermediate cases of either $G = 0$, $S' = 0$ or $G' = +1$, $S = +1$ are forbidden, the object and the stop never being allowed to be in the same plane. In this row for $G = +1$ the value of m_3 equals $3m_1$ for $G = +1$ and the value of m_4 equals $-e_0$ for $G = 0$.

5. Possible applications. — For systems consisting of doublets the numbers given here can be useful to find a first trial. Where the paraxial set up is fixed, the third order aberrations of the combination of two consecutive doublets α and β are found from the composition formulae :

$$m_1 = m_{1\alpha} S_\beta G_\beta + m_{1\beta},$$

$$m_2 = m_{2\alpha} S_\beta^2 G_\beta^2 + m_{2\beta},$$

$$m_3 = m_{3\alpha} S_\beta G_\beta^3 + m_{3\beta},$$

$$m_4 = m_{4\alpha} G_\beta^4 + m_{4\beta},$$

$$R_p J^2 = R_\alpha J_\alpha^2 + R_\beta J_\beta^2,$$

where J is the reduced power of the combination, J_α and J_β the reduced power of the first and second doublets respectively, and G_β and S_β the magnification of the object and the stop for the second doublet.

The following paraxial relations may be useful in this respect :

$$G = G_\alpha G_\beta, \quad S = S_\alpha S_\beta,$$

$$G_\beta J = J_\alpha + GJ_\beta, \quad S_\beta J = J_\alpha + SJ_\beta.$$

The magnifications G and S are those of the combination.

An immediate consequence of the addition formulae is that the influence of the first part is small (especially for spherical aberration and coma) when G_β is small, and for distortion and meridional curvature when S_β is small.

Further it should be kept in mind that the values of the m 's are inversely proportional to the power J (or J_α or J_β , as the case might be).

When a complicated system α has known third order aberrations, the addition formulae open the opportunity to combine it with a low power doublet, placed behind it, in order to reduce one or more of the aberrations, the choice being made from the types published here. For this application the values for $G = +5/6$ have been given.

There are some discrepancies between the values as given by SMITH and MILNE [1] and as following from our calculations. After a re-determination of these it is felt that there might be some slight errors in the cited article.

These are :

A_{Sm} for type A2a, A12a, B2a and B5b,

B_{Sm} for type A12a and B2a,

C_{Sm} for type A12a and B2a.

For type A1b the decimal point is wrong ; the value is ten times that given.

The following values give large discrepancies :

A_{Sm} for type B3b,

B_{Sm} for type A2a, A4a, A8a*, A9a, and B2b,

C_{Sm} for type A2a, A7a, A4b, A18b and B2b.

It should be remarked here that our data have an uncertainty of several units in the last given decimal place.

The author wishes to thank Messrs J. C. de MUNCK and L. J. LEIPOLDT for the execution of the laborious computations.

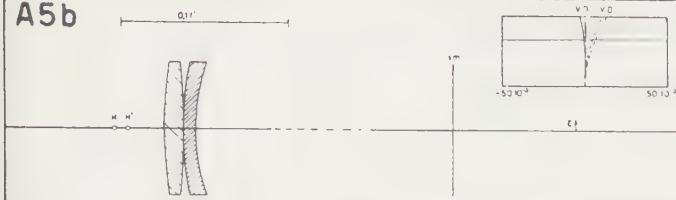
[1] T. SMITH and G. MILNE, A recalculation of the telescope objectives of STEINHEIL and VOIT, *Trans. Opt. Soc.*, t. 22, 1920-21, p. 122 ; *Collected Res. Nat. Phys. Lab.*, t. 17, 1922, p. 169.

[2] T. SMITH, The changes in aberrations when the object and stop are moved, *Trans. Opt. Soc.*, t. 23, 1921-22, p. 311 ; and *Collected Res. Nat. Phys. Lab.*, t. 17, 1922, p. 137.

[3] G. C. STEWARD, The symmetrical optical instrument, *Cambr. Math. Tracts* (1928).

A1a			
$R_1 = 10,701688$	$A = 1,00000$	$3^d\text{sph.} = -0,013148$	
$R_2 = 4,705470$	$B = 1,05081$	$c = -0,028371$	
$R_3 = -6,267679$	$C = 0,93126$	$R_m = -20,957$	
$R_4 = -2,397466$	$D = -0,02143$	$R_s = -7,370$	
$t_1 = 0,011111$	$L_H = -0,05081$	$R_p = -0,5746$	
$t_2 = 0,009284$	$L_{H'} = -0,06874$	$\text{sph.} = -0,008192$	
$t_3 = 0,006945$		$\text{comac.} = -0,008011$	
		$\text{rel. dist.} = -0,526819$	
$e_0 = +0,0232$	m_1	m_2	m_3
$G = 0$	-0,5268	-20,96	-152,2
$G = +1$	-51,75	-17,96	$3m_1$
$G = -1$	-1,0768	-90,22	-1467
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0685	-0,1915	0,1726
			0,2022
$e_0 = -0,000456$	m_1	m_2	m_3
$G = 0$	-0,2141	-12,45	-101,7
$G = +1$	-34,91	-9,450	$3m_1$
$G = -1$	-0,4278	-52,38	-955,0
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0361	-0,1665	0,1006
			0,1790
A3a			
$R_1 = 7,436677$	$A = 1,00000$	$3^d\text{sph.} = -0,001787$	
$R_2 = 1,834528$	$B = 1,03048$	$c = -0,010835$	
$R_3 = -3,278097$	$C = 0,95477$	$R_m = -9,041$	
$R_4 = 0$	$D = -0,01613$	$R_s = -3,458$	
$t_1 = 0,011111$	$L_H = -0,03048$	$R_p = -0,6653$	
$t_2 = 0,004347$	$L_{H'} = -0,04524$	$\text{sph.} = -0,0001040$	
$t_3 = 0,006945$		$\text{comac.} = -0,004322$	
		$\text{rel. dist.} = 0,125229$	
$e_0 = -0,00629$	m_1	m_2	m_3
$G = 0$	-0,1252	-9,041	-74,69
$G = +1$	-25,90	-5,868	$3m_1$
$G = -1$	-0,2441	-37,65	-696,2
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0261	-0,1337	0,7132
			0,1449
$e_0 = -0,00696$	m_1	m_2	m_3
$G = 0$	-0,0697	-6,991	-54,78
$G = +1$	-19,26	-3,991	$3m_1$
$G = -1$	-0,1324	-28,78	-511,4
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0174	-0,1216	0,0778
			0,1024
A5a			
$R_1 = 4,129061$	$A = 1,00000$	$3^d\text{sph.} = -0,000127$	
$R_2 = -1,258067$	$B = 1,01240$	$c = -0,002473$	
$R_3 = -1,868460$	$C = 0,97572$	$R_m = -4,316$	
$R_4 = 1,092186$	$D = -0,01218$	$R_s = -1,915$	
$t_1 = 0,011111$	$L_H = -0,01240$	$R_p = -0,7126$	
$t_2 = 0,000542$	$L_{H'} = -0,02428$	$\text{sph.} = 0,000069$	
$t_3 = 0,006945$		$\text{comac.} = -0,001073$	
		$\text{rel. dist.} = -0,019794$	
$e_0 = -0,00726$	m_1	m_2	m_3
$G = 0$	-0,0198	-4,316	-18,54
$G = +1$	-7,181	-1,316	$3m_1$
$G = -1$	-0,0323	-17,48	-171,2
$G = +\frac{5}{6}$	-0,00934	-0,0883	0,1112
			0,0015
$e_0 = -0,00719$	m_1	m_2	m_3
$G = 0$	-0,0179	-4,205	-16,38
$G = +1$	-6,459	-1,205	$3m_1$
$G = -1$	-0,0286	-17,01	-169,8
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0090	-0,0869	0,1157
			-0,0062

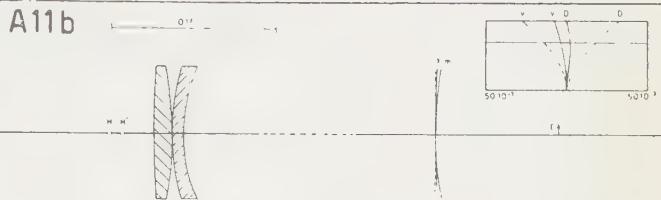
A5b



$R_1 = 4,129434$	$A = 1,00001$	$3^d \text{ sph.} = 0,000701$
$R_2 = -1,607115$	$B = 1,03058$	$c = 0,006525$
$R_3 = 4,776361$	$C = 0,95916$	$R_m = 0,421$
$R_4 = 0,229985$	$D = -0,01151$	$R_s = -0,288$
$t_1 = 0,011109$	$l_H = -0,03058$	$R_p = -0,6444$
$t_2 = 0,000014$	$l_{H'} = -0,04084$	$\text{sph.} = 0,000411$
$t_3 = 0,006943$		$\text{comac.} = 0,002718$
		$\text{rel. dist.} = 0,63385$

$e_o = -0,01464$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	0,0634	0,4210	46,97	1,817
$G = +1$	14,66	3,421	$3m_1$	$-e_o$
$G = -1$	0,1414	2,489	394,0	538,0
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0016	-0,0106	0,1594	-0,1796

A11b



$R_1 = 1,714338$	$A = 1,00000$	$3^d \text{ sph.} = 0,003932$
$R_2 = -4,186174$	$B = 1,02732$	$c = 0,016927$
$R_3 = 6,894121$	$C = 0,96228$	$R_m = 4,661$
$R_4 = 10,577204$	$D = -0,01143$	$R_s = 1,145$
$t_1 = 0,011110$	$l_H = -0,02732$	$R_p = -0,6131$
$t_2 = 0,000014$	$l_{H'} = -0,03772$	$\text{sph.} = 0,002391$
$t_3 = 0,006944$		$\text{comac.} = 0,006396$
		$\text{rel. dist.} = 0,134638$

$e_o = -0,01727$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	0,1346	4,661	110,5	10,19
$G = +1$	35,84	7,661	$3m_1$	$-e_o$
$G = -1$	0,2863	20,31	954,6	1384,5
$G = +\frac{5}{6}$	0,0080	0,0533	0,2287	-0,3627

A18b



$R_1 = -0,737135$	$A = 0,999995$	$3^d \text{ sph.} = 0,021827$
$R_2 = -7,131332$	$B = 1,02898$	$c = 0,045265$
$R_3 = 10,426196$	$C = 0,96084$	$R_m = 13,715$
$R_4 = 14,821155$	$D = -0,01132$	$R_s = 4,231$
$t_1 = 0,011113$	$l_H = -0,02898$	$R_p = -0,5109$
$t_2 = 0,000014$	$l_{H'} = -0,03916$	$\text{sph.} = 0,014985$
$t_3 = 0,006945$		$\text{comac.} = 0,012819$
		$\text{rel. dist.} = 0,320423$

$e_o = -0,0280$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	0,3204	13,72	221,5	56,58
$G = +1$	72,84	16,72	$3m_1$	$-e_o$
$G = -1$	0,6688	58,79	1954,7	3385
$G = +\frac{5}{6}$	0,0301	0,1723	0,2887	-0,6152

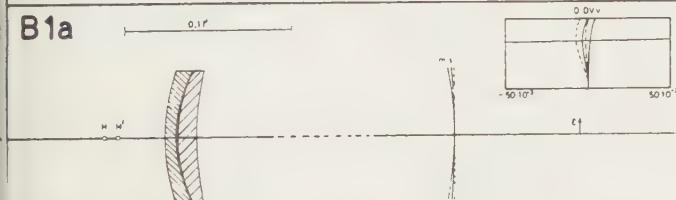
A19b



$R_1 = -3,173030$	$A = 1,00000$	$3^d \text{ sph.} = 0,146780$
$R_2 = -10,755777$	$B = 1,03810$	$c = 0,227195$
$R_3 = 15,802475$	$C = 0,95255$	$R_m = 41,822$
$R_4 = 21,913202$	$D = -0,01115$	$R_s = 13,765$
$t_1 = 0,011111$	$l_H = -0,03810$	$R_p = -0,2641$
$t_2 = 0,000014$	$l_{H'} = -0,04745$	$\text{sph.} = 0,146838$
$t_3 = 0,006944$		$\text{comac.} = 0,028136$
		$\text{rel. dist.} = 1,075644$

$e_o = -0,0837$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	1,076	41,82	486,2	380,5
$G = +1$	161,1	44,82	$3m_1$	$-e_o$
$G = -1$	2,235	180,4	4423	11621
$G = +\frac{5}{6}$	0,1095	0,4397	0,2521	-0,9072

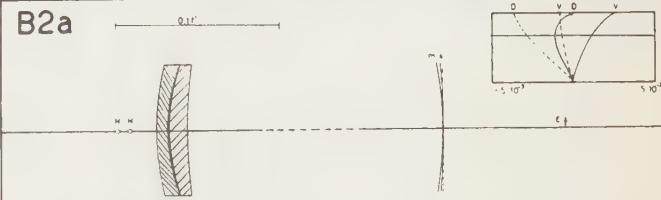
B1a



$R_1 = 8,093434$	$A = 1,00000$	$3^d \text{ sph.} = -0,006628$
$R_2 = 11,590470$	$B = 1,03666$	$c = -0,006916$
$R_3 = 11,109568$	$C = 0,95292$	$R_m = -4,878$
$R_4 = 5,356346$	$D = -0,01214$	$R_s = -2,049$
$t_1 = 0,006944$	$l_H = -0,03666$	$R_p = -0,6336$
$t_2 = 0,000486$	$l_{H'} = -0,04708$	$\text{sph.} = -0,004240$
$t_3 = 0,011111$		$\text{comac.} = -0,001291$
		$\text{rel. dist.} = -0,041861$

$e_o = -0,01021$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	-0,0419	-4,878	-22,31	-17,27
$G = +1$	-8,435	-1,878	$3m_1$	$-e_o$
$G = -1$	-0,0736	-19,99	-225,7	-549,6
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0155	-0,0793	0,1047	-0,0040

B2a



$R_1 = 6,082115$	$A = 1,00000$	$3^d \text{ sph.} = -0,001930$
$R_2 = 9,281883$	$B = 1,02441$	$c = -0,002918$
$R_3 = 9,008821$	$C = 0,96453$	$R_m = -4,256$
$R_4 = 3,447658$	$D = -0,01193$	$R_s = -1,872$
$t_1 = 0,006945$	$l_H = -0,02441$	$R_p = -0,6811$
$t_2 = 0,000278$	$l_{H'} = -0,03547$	$\text{sph.} = -0,001155$
$t_3 = 0,011112$		$\text{comac.} = -0,000820$
		$\text{rel. dist.} = -0,027397$

$e_o = -0,00836$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	-0,0274	-4,256	-14,17	-4,987
$G = +1$	-5,722	-1,253	$3m_1$	$-e_o$
$G = -1$	0,0029	-17,33	-152,9	-261,184
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0115	-0,0780	0,1175	-0,0188

$R_1 = 2,697557$ $A = 1,00000$ $3^d \text{sph.} = -0,000021$ $R_2 = -2,628717$ $B = 1,00360$ $c = -0,000809$ $R_3 = R_2$ $C = 0,98483$ $R_m = -3,798$ $R_4 = 0,246527$ $D = -0,01163$ $R_s = -1,749$ $t_1 = 0,011111$ $L_H = -0,00360$ $R_p = -0,7243$ $t_2 = 0$ $L_H' = -0,01517$ $\text{sph.} = -0,000008$ $t_3 = 0,006945$ $\text{comac.} = -0,000358$ $\text{rel. dist.} = -0,009986$ $e_o = -0,00687$ m_1 m_2 m_3 m_4 $G = 0$ $0,0100$ $-3,798$ $-6,195$ $-0,0552$ $G = +1$ $-3,065$ $-0,7981$ $3m_1$ $-e_o$ $G = -1$ $-0,0131$ $-15,29$ $-83,20$ $-93,43$ $G = +\frac{5}{6}$ $-0,0074$ $-0,0829$ $0,1433$ $-0,0458$					$R_1 = 2,660508$ $A = 1,00000$ $3^d \text{sph.} = -0,000044$ $R_2 = -2,660508$ $B = 1,00340$ $c = -0,000799$ $R_3 = -2,651983$ $C = 0,98500$ $R_m = -3,732$ $R_4 = 0,218366$ $D = -0,01164$ $R_s = -1,746$ $t_1 = 0,011111$ $L_H = -0,00340$ $R_p = -0,7244$ $t_2 = 0,000014$ $L_H' = -0,01500$ $\text{sph.} = -0,000034$ $t_3 = 0,006945$ $\text{comac.} = -0,000343$ $\text{rel. dist.} = -0,009817$ $e_o = -0,00686$ m_1 m_2 m_3 m_4 $G = 0$ $-0,0098$ $-3,792$ $-5,931$ $-0,1151$ $G = +1$ $-2,976$ $-0,7923$ $3m_1$ $-e_o$ $G = -1$ $-0,0128$ $-15,27$ $-81,11$ $-91,52$ $G = +\frac{5}{6}$ $-0,0074$ $-0,0829$ $0,1443$ $-0,0470$				
$R_1 = 2,660685$ $A = 1,00000$ $3^d \text{sph.} = 0,000012$ $R_2 = -3,108651$ $B = 1,03222$ $c = -0,000380$ $R_3 = -3,300280$ $C = 0,94410$ $R_m = -4,875$ $R_4 = 0,089165$ $D = -0,02548$ $R_s = -2,078$ $t_1 = 0,011111$ $L_H = -0,03222$ $R_p = -0,6800$ $t_2 = 0,013887$ $L_H' = -0,055895$ $\text{sph.} = -0,000003$ $t_3 = 0,006945$ $\text{comac.} = -0,000180$ $\text{rel. dist.} = -0,057663$ $e_o = -0,01002$ m_1 m_2 m_3 m_4 $G = 0$ $-0,0577$ $-4,875$ $-2,977$ $0,0328$ $G = +1$ $-1,992$ $-1,875$ $3m_1$ $-e_o$ $G = -1$ $-0,1053$ $-20,16$ $-71,32$ $66,68$ $G = +\frac{5}{6}$ $-0,0180$ $-0,0665$ $0,1778$ $-0,0839$					$R_1 = 2,408584$ $A = 1,00000$ $3^d \text{sph.} = 0,000002$ $R_2 = -2,909435$ $B = 1,00186$ $c = -0,000554$ $R_3 = -2,864182$ $C = 0,98652$ $R_m = -3,718$ $R_4 = 0$ $D = -0,01164$ $R_s = -1,723$ $t_1 = 0,011111$ $L_H = -0,00186$ $R_p = -0,7257$ $t_2 = 0,000014$ $L_H' = -0,01348$ $\text{sph.} = 0,000006$ $t_3 = 0,006945$ $\text{comac.} = -0,000251$ $\text{rel. dist.} = -0,008535$ $e_o = -0,006653$ m_1 m_2 m_3 m_4 $G = 0$ $-0,0085$ $-3,718$ $-4,356$ $0,0052$ $G = +1$ $-2,452$ $-0,7540$ $3m_1$ $-e_o$ $G = -1$ $-0,0104$ $-14,95$ $-67,59$ $-72,18$ $G = +\frac{5}{6}$ $-0,0070$ $-0,0823$ $0,1481$ $-0,0528$				
$R_1 = 1,974384$ $A = 1,00000$ $3^d \text{sph.} = 0,000308$ $R_2 = -4,131285$ $B = 1,04785$ $c = 0,000962$ $R_3 = -4,521787$ $C = 0,92296$ $R_m = -5,048$ $R_4 = -0,742678$ $D = -0,03287$ $R_s = -2,114$ $t_1 = 0,011111$ $L_H = -0,04785$ $R_p = -0,6466$ $t_2 = 0,021307$ $L_H' = -0,07704$ $\text{sph.} = 0,000186$ $t_3 = 0,006945$ $\text{comac.} = 0,000340$ $\text{rel. dist.} = -0,118698$ $e_o = -0,00801$ m_1 m_2 m_3 m_4 $G = 0$ $-0,1187$ $-5,048$ $5,872$ $0,7984$ $G = +1$ $0,9575$ $-2,048$ $3m_1$ $-e_o$ $G = -1$ $-0,2294$ $-21,59$ $-3,713$ $38,09$ $G = +\frac{5}{6}$ $-0,0264$ $-0,0246$ $0,1708$ $-0,1130$					$R_1 = 1,714305$ $A = 1,00000$ $3^d \text{sph.} = 0,000026$ $R_2 = -3,594110$ $B = 0,99746$ $c = -0,00036$ $R_3 = -3,503348$ $C = 0,99087$ $R_m = -3,689$ $R_4 = -0,653899$ $D = -0,01165$ $R_s = -1,715$ $t_1 = 0,011111$ $L_H = 0,00254$ $R_p = -0,7280$ $t_2 = 0,000014$ $L_H' = -0,00913$ $\text{sph.} = 0,000018$ $t_3 = 0,006945$ $\text{comac.} = -0,000024$ $\text{rel. dist.} = -0,005481$ $e_o = -0,00673$ m_1 m_2 m_3 m_4 $G = 0$ $-0,0055$ $-3,689$ $-0,4149$ $0,0679$ $G = +1$ $-1,138$ $-0,6890$ $3m_1$ $-e_o$ $G = -1$ $-0,0042$ $-14,80$ $-35,66$ $-28,88$ $G = +\frac{5}{6}$ $-0,0065$ $-0,0839$ $0,1674$ $-0,0730$				

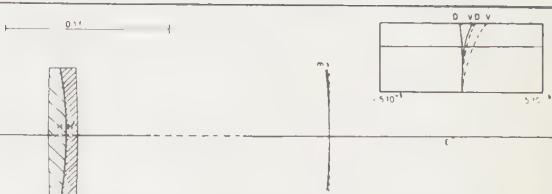
A12a



$R_1 = 1,830943$	$A = 0,99999$	$3^d \text{ sph.} = 0,000022$
$R_2 = -3,671120$	$B = 0,99693$	$c = 0,000016$
$R_3 = -3,579053$	$C = 0,99140$	$R_m = -3,686$
$R_4 = -0,736198$	$D = -0,01165$	$R_s = -1,714$
$t_1 = 0,011111$	$l_H = 0,00307$	$R_p = -0,7281$
$t_2 = 0,000014$	$l_{H'} = -0,00860$	$\text{sph.} = 0,000014$
$t_3 = 0,006945$		$\text{comac.} = 0,000001$
		$\text{rel. dist.} = 0,005119$

$e_0 = -0,00672$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	-0,0051	-3,686	0,0250	0,0414
$G = +1$	-0,9917	-0,6847	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	-0,0035	-14,784	-32,155	-24,66
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0065	-0,0641	0,1696	-0,0753

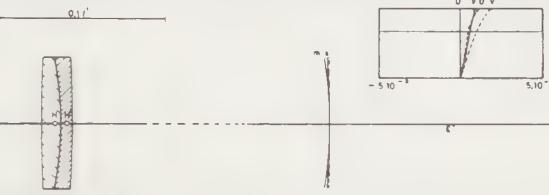
A13a



$R_1 = 1,0115900$	$A = 1,00000$	$3^d \text{ sph.} = -0,000014$
$R_2 = -4,279518$	$B = 0,99291$	$c = 0,000367$
$R_3 = -4,207497$	$C = 0,99541$	$R_m = -3,671$
$R_4 = -1,370074$	$D = -0,01165$	$R_s = -1,709$
$t_1 = 0,011111$	$l_H = 0,00709$	$R_p = -0,7282$
$t_2 = 0,000014$	$l_{H'} = -0,00459$	$\text{sph.} = 0,000017$
$t_3 = 0,006945$		$\text{comac.} = 0,000173$
		$\text{rel. dist.} = 0,002452$

$e_0 = -0,00671$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	-0,0024	-3,671	2,991	-0,0355
$G = +1$	-0,0030	-0,6712	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	0,00181	-14,63	-8,149	5,954
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0060	-0,0860	0,1851	-0,0911

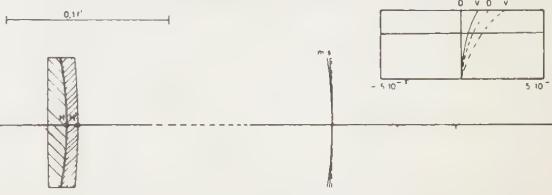
A14a



$R_1 = 0,782998$	$A = 1,00000$	$3^d \text{ sph.} = -0,000015$
$R_2 = -4,513923$	$B = 0,99137$	$c = 0,000509$
$R_3 = -4,459410$	$C = 0,99695$	$R_m = -3,671$
$R_4 = -1,619716$	$D = -0,01165$	$R_s = -1,710$
$t_1 = 0,011111$	$l_H = 0,00863$	$R_p = -0,7278$
$t_2 = 0,000014$	$l_{H'} = -0,00305$	$\text{sph.} = 0,000006$
$t_3 = 0,006945$		$\text{comac.} = 0,000233$
		$\text{rel. dist.} = 0,001444$

$e_0 = -0,00672$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	-0,0014	-3,671	4,025	-0,0389
$G = +1$	0,3415	-0,6735	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	0,00384	-14,68	0,1454	16,95
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0058	-0,0868	0,1910	-0,0968

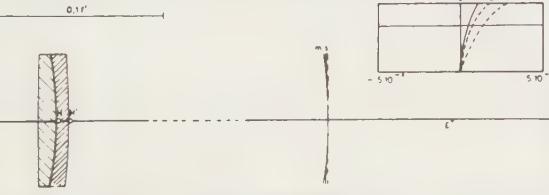
A15a



$R_1 = 0,328470$	$A = 1,00000$	$3^d \text{ sph.} = -0,000056$
$R_2 = -4,961801$	$B = 0,98837$	$c = 0,000711$
$R_3 = -4,949862$	$C = 0,99999$	$R_m = -3,688$
$R_4 = -2,111829$	$D = -0,01164$	$R_s = -1,713$
$t_1 = 0,011111$	$l_H = 0,01163$	$R_p = -0,7262$
$t_2 = 0,000014$	$l_{H'} = -0,00001$	$\text{sph.} = -0,00053$
$t_3 = 0,006945$		$\text{comac.} = 0,000345$
		$\text{rel. dist.} = 0,000490$

$e_0 = -0,00676$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	0,0005	-3,688	5,971	-0,2476
$G = +1$	0,9903	-0,6881	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	0,0077	-14,73	15,53	34,22
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0057	-0,0888	0,2031	-0,1082

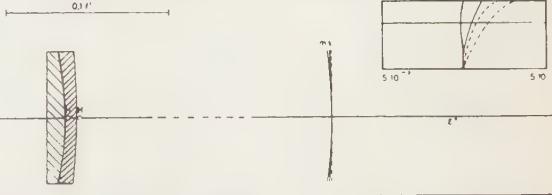
A16a



$R_1 = 0,204556$	$A = 1,00000$	$3^d \text{ sph.} = -0,000133$
$R_2 = -5,093506$	$B = 0,96751$	$c = 0,000752$
$R_3 = R_2$	$C = 1,00086$	$R_m = -3,694$
$R_4 = -2,247458$	$D = -0,01164$	$R_s = -1,716$
$t_1 = 0,011111$	$l_H = 0,01249$	$R_p = -0,7258$
$t_2 = 0$	$l_{H'} = 0,00086$	$\text{sph.} = 0,000076$
$t_3 = 0,006945$		$\text{comac.} = 0,000375$
		$\text{rel. dist.} = 0,001037$

$e_0 = -0,00678$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	0,0010	-3,694	6,481	-0,3432
$G = +1$	1,160	-0,6935	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	0,00886	-14,74	19,58	38,13
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0055	-0,0893	0,2064	-0,1115

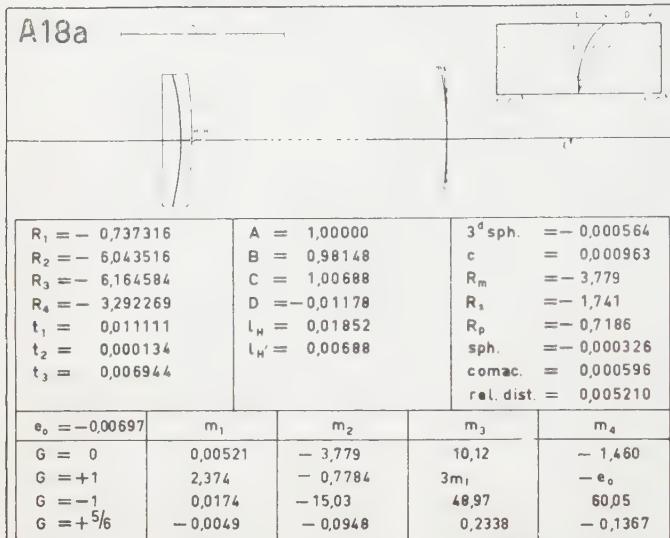
A17a



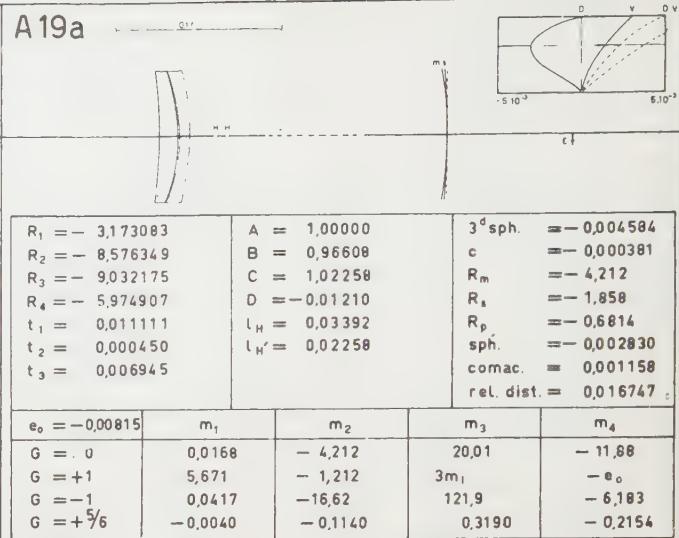
$R_1 = 0$	$A = 1,00000$	$3^d \text{ sph.} = -0,000194$
$R_2 = -5,294257$	$B = 0,98626$	$c = 0,000826$
$R_3 = -5,319682$	$C = 1,00206$	$R_m = -3,710$
$R_4 = -2,473357$	$D = -0,01170$	$R_s = -1,720$
$t_1 = 0,011111$	$l_H = 0,01374$	$R_p = -0,7244$
$t_2 = 0,000064$	$l_{H'} = 0,00206$	$\text{sph.} = 0,000111$
$t_3 = 0,006945$		$\text{comac.} = 0,000425$
		$\text{rel. dist.} = 0,001946$

$e_0 = -0,00681$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	0,0020	-3,710	7,340	-0,5035
$G = +1$	1,447	-0,7104	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	0,0107	-14,73	26,46	44,72
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0054	-0,0905	0,2124	-0,1170

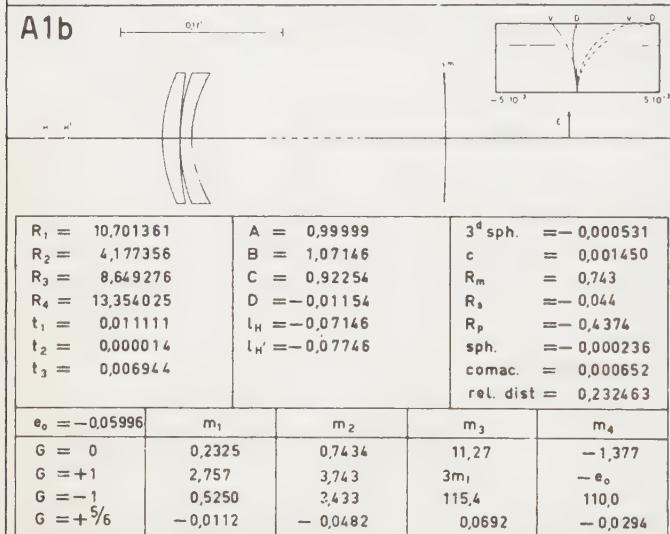
A18a



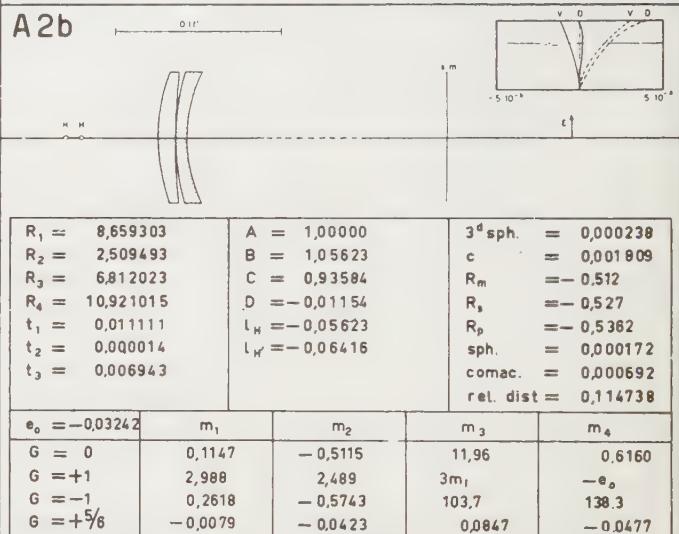
A19a



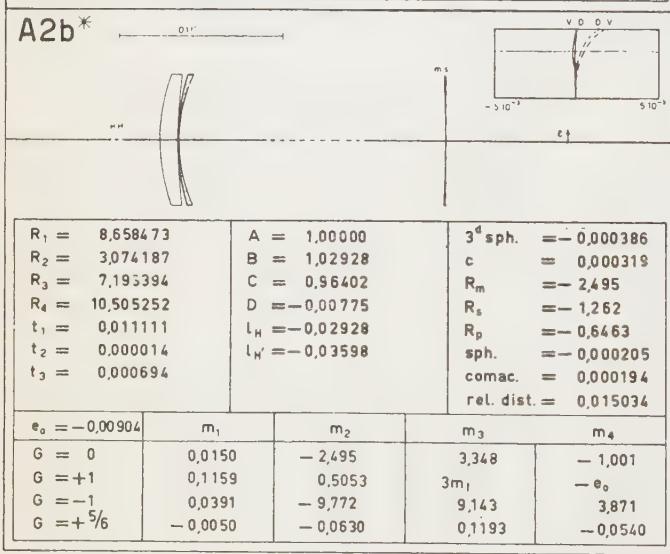
A1b



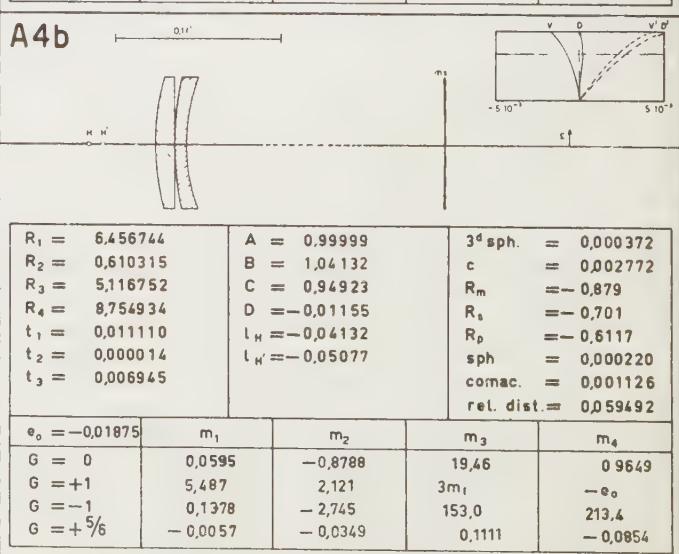
A2b



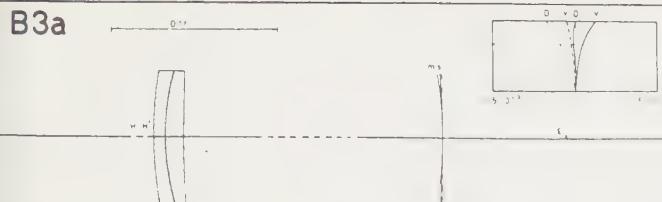
A2b*



A4b



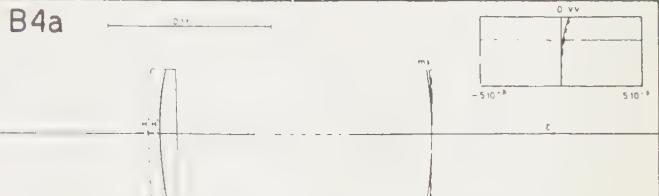
B3a



$R_1 = 3,978406$	$A = 1,00000$	$3^d \text{sph.} = -0,000222$
$R_2 = 6,954814$	$B = 1,01190$	$c = -0,000965$
$R_3 = 6,917405$	$C = 0,97668$	$R_m = -3,855$
$R_4 = 1,511726$	$D = -0,01170$	$R_s = -1,761$
$t_1 = 0,006943$	$l_H = -0,01190$	$R_p = -0,7130$
$t_2 = 0,000056$	$l_{H'} = -0,02332$	$\text{sph.} = -0,000120$
$t_3 = 0,011108$		$\text{comac.} = 0,0000385$
		$\text{rel. dist.} = -0,015935$

$e_0 = -0,00725$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	-0,0159	-3,855	-6,651	-0,5761
$G = +1$	-3,218	-0,8556	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	-0,3116	-15,59	-87,74	-107,1
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0087	-0,0787	0,1383	-0,0436

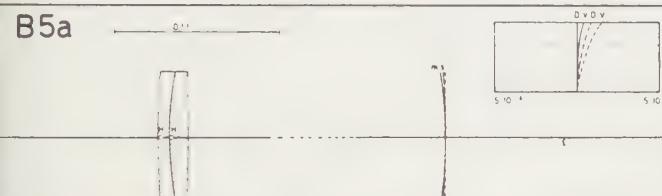
B4a



$R_1 = 2,335960$	$A = 1,00000$	$3^d \text{sph.} = 0,000007$
$R_2 = 5,210182$	$B = 1,00168$	$c = 0,000006$
$R_3 = 5,288643$	$C = 0,98669$	$R_m = -3,687$
$R_4 = -0,040780$	$D = -0,01165$	$R_s = -1,712$
$t_1 = 0,006945$	$l_H = -0,00168$	$R_p = -0,7258$
$t_2 = 0,000014$	$l_{H'} = -0,01331$	$\text{sph.} = -0,000001$
$t_3 = 0,011111$		$\text{comac.} = 0,000003$
		$\text{rel. dist.} = -0,010276$

$e_0 = -0,00680$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	-0,0103	-3,687	0,0582	0,0168
$G = +1$	-0,9806	-0,6872	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	-0,01376	-14,85	-31,96	-24,70
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0074	-0,0797	0,1644	-0,0736

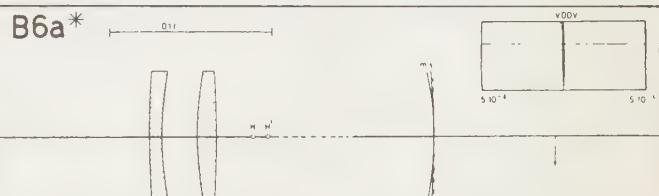
B5a



$R_1 = 1,808038$	$A = 1,00000$	$3^d \text{sph.} = 0,000031$
$R_2 = 4,658414$	$B = 0,99822$	$c = 0,000398$
$R_3 = 4,725364$	$C = 0,99012$	$R_m = -3,664$
$R_4 = -0,582707$	$D = -0,01164$	$R_s = -1,707$
$t_1 = 0,006945$	$l_H = 0,00178$	$R_p = -0,7276$
$t_2 = 0,000014$	$l_{H'} = -0,00988$	$\text{sph.} = 0,000029$
$t_3 = 0,011111$		$\text{comac.} = 0,000166$
		$\text{rel. dist.} = -0,006073$

$e_0 = -0,00673$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	-0,0061	-3,664	2,877	0,0795
$G = +1$	-0,0406	-0,6644	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	-0,00514	-14,71	-9,045	6,604
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0066	-0,0827	0,1803	-0,0088

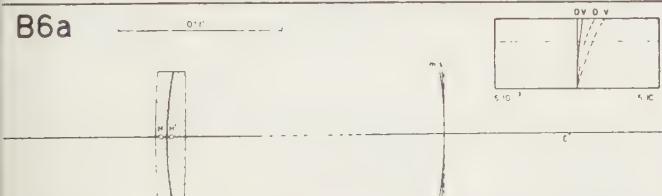
B6a*



$R_1 = 1,619608$	$A = 1,00001$	$3^d \text{sph.} = 0,000176$
$R_2 = 4,831005$	$B = 0,93693$	$c = 0,000058$
$R_3 = 4,600134$	$C = 1,03276$	$R_m = -4,939$
$R_4 = -0,911386$	$D = -0,03237$	$R_s = -2,086$
$t_1 = 0,006945$	$l_H = 0,06307$	$R_p = -0,6597$
$t_2 = 0,020833$	$l_{H'} = 0,03276$	$\text{sph.} = 0,000117$
$t_3 = 0,011111$		$\text{comac.} = 0,000018$
		$\text{rel. dist.} = 0,063881$

$e_0 = -0,00902$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	0,0639	-4,939	-31,168	0,4554
$G = +1$	-1,106	-1,935	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	0,1368	-18,96	-48,63	-31,09
$G = +\frac{5}{6}$	0,0031	-0,1716	0,3230	-0,1471

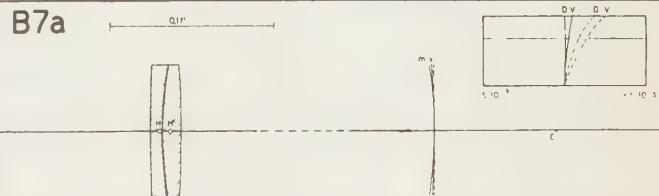
B6a



$R_1 = 1,619444$	$A = 1,00000$	$3^d \text{sph.} = -0,000012$
$R_2 = 4,458385$	$B = 0,99695$	$c = 0,000502$
$R_3 = 4,513164$	$C = 0,99137$	$R_m = -3,658$
$R_4 = -0,782867$	$D = -0,01165$	$R_s = -1,705$
$t_1 = 0,006945$	$l_H = 0,00305$	$R_p = -0,7278$
$t_2 = 0,000014$	$l_{H'} = -0,00863$	$\text{sph.} = -0,000010$
$t_3 = 0,011111$		$\text{comac.} = 0,000231$
		$\text{rel. dist.} = -0,005286$

$e_0 = -0,00672$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	-0,0053	-3,658	3,985	-0,0301
$G = +1$	0,3283	-0,6620	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	-0,0039	-14,67	-0,090	16,73
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0012	-0,0832	0,1858	-0,0946

B7a



$R_1 = 1,251665$	$A = 1,00001$	$3^d \text{sph.} = -0,000030$
$R_2 = 4,092117$	$B = 0,99441$	$c = 0,000836$
$R_3 = R_2$	$C = 0,99392$	$R_m = -3,669$
$R_4 = -1,207176$	$D = -0,01164$	$R_s = -1,708$
$t_1 = 0,006945$	$l_H = 0,00559$	$R_p = -0,7284$
$t_2 = 0$	$l_{H'} = -0,00608$	$\text{sph.} = -0,000017$
$t_3 = 0,011111$		$\text{comac.} = 0,000382$
		$\text{rel. dist.} = -0,003593$

$e_0 = -0,00683$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	-0,0036	-3,669	6,607	-0,0780
$G = +1$	1,202	-0,6688	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	-0,0004	-14,70	20,79	43,84
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0063	-0,0847	0,2003	-0,1092

B8a



$R_1 = 0,395379$	$A = 1,00000$	$3^d \text{sph.} = -0,000177$
$R_2 = 3,242183$	$B = 0,98525$	$c = 0,002340$
$R_3 = 2,645688$	$C = 1,00262$	$R_m = -3,927$
$R_4 = -2,645688$	$D = -0,01217$	$R_s = -1,792$
$t_1 = 0,006945$	$l_H = 0,01475$	$R_p = -0,7232$
$t_2 = 0,000528$	$l_{H'} = 0,00262$	$\text{sph.} = -0,000100$
$t_3 = 0,011111$		$\text{comac.} = 0,001092$
		$\text{rel. dist.} = 0,002457$

$e_0 = -0,00684$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	0,0025	-3,927	18,86	-0,4598
$G = +1$	5,288	-0,9269	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	0,01118	-15,66	115,9	166,5
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0053	-0,0969	0,2813	-0,1848

B9a



$R_1 = 0,314753$	$A = 1,00000$	$3^d \text{sph.} = -0,000239$
$R_2 = 3,172774$	$B = 0,98281$	$c = 0,002902$
$R_3 = 2,261285$	$C = 1,00482$	$R_m = -4,087$
$R_4 = -3,034903$	$D = -0,01245$	$R_s = -1,843$
$t_1 = 0,006945$	$l_H = 0,01719$	$R_p = -0,7206$
$t_2 = 0,000805$	$l_{H'} = 0,00487$	$\text{sph.} = 0,000137$
$t_3 = 0,011111$		$\text{comac.} = 0,001360$
		$\text{rel. dist.} = 0,004629$

$e_0 = -0,00690$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	0,0046	-4,087	23,50	-0,6201
$G = +1$	6,832	-1,087	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	0,0162	-16,27	151,0	212,1
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0050	-0,1030	0,3160	-0,2157

B10a



$R_1 = -6,008905$	$A = 1,00000$	$3^d \text{sph.} = 0,000512$
$R_2 = -2,951855$	$B = 0,96843$	$c = -0,003848$
$R_3 = 2,268247$	$C = 1,02068$	$R_m = -1,380$
$R_4 = -3,126572$	$D = -0,01154$	$R_s = -0,913$
$t_1 = 0,006945$	$l_H = 0,03157$	$R_p = -0,6786$
$t_2 = 0,000014$	$l_{H'} = 0,02068$	$\text{sph.} = 0,000284$
$t_3 = 0,011111$		$\text{comac.} = -0,001829$
		$\text{rel. dist.} = -0,024577$

$e_0 = -0,00971$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	-0,0246	-1,380	-31,60	1,326
$G = +1$	-11,53	1,621	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	0,0048	-5,785	-257,8	-323,1
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0085	-0,0160	-0,1393	0,1777

B11a



$R_1 = -6,810139$	$A = 1,00001$	$3^d \text{sph.} = 0,001461$
$R_2 = -3,715739$	$B = 0,97215$	$c = -0,007259$
$R_3 = 3,833241$	$C = 1,01681$	$R_m = -0,250$
$R_4 = -1,587136$	$D = -0,01150$	$R_s = -0,533$
$t_1 = 0,006945$	$l_H = 0,02784$	$R_p = -0,6731$
$t_2 = 0,000014$	$l_{H'} = 0,01681$	$\text{sph.} = 0,000848$
$t_3 = 0,011111$		$\text{comac.} = 0,003567$
		$\text{rel. dist.} = -0,034922$

$e_0 = -0,00947$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	-0,0349	-2,501	-61,64	3,788
$G = +1$	-21,54	2,750	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	-0,0603	-1,391	-484,7	-595,1
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0137	0,0409	-0,3902	-0,4249

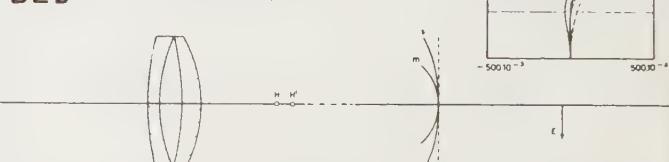
B1b



$R_1 = 8,093074$	$A = 0,99999$	$3^d \text{sph.} = -0,198156$
$R_2 = 13,297526$	$B = 0,88291$	$c = -0,085264$
$R_3 = -9,250876$	$C = 1,09551$	$R_m = -80,586$
$R_4 = -15,838440$	$D = -0,03276$	$R_s = -27,042$
$t_1 = 0,006945$	$l_H = 0,11709$	$R_p = -0,2690$
$t_2 = 0,019348$	$l_{H'} = 0,09551$	$\text{sph.} = -0,141336$
$t_3 = 0,011111$		$\text{comac.} = 0,027663$
		$\text{rel. dist.} = 3,520480$

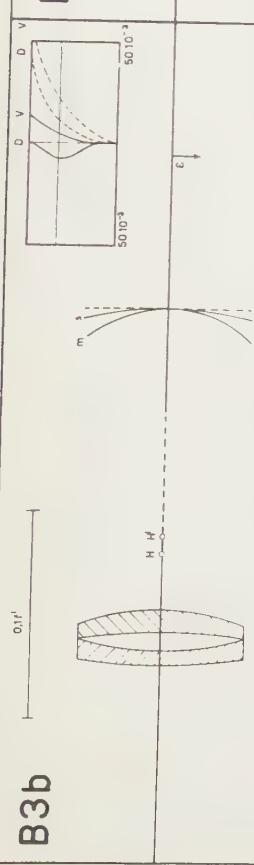
$e_0 = 0,4089$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	3,520	-80,58	478,0	-513,6
$G = +1$	158,3	-77,59	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	6,632	-281,3	2931	-3732
$G = +\frac{5}{6}$	0,9275	-6,0240	12,1167	-7,4577

B2b

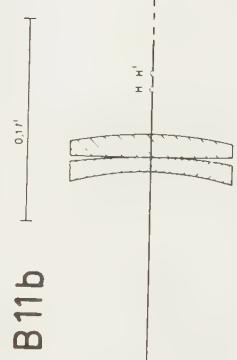


$R_1 = 6,083188$	$A = 0,99999^5$	$3^d \text{sph.} = -0,049777$
$R_2 = 10,114294$	$B = 0,92179$	$c = -0,002005$
$R_3 = 5,856108$	$C = 1,05635$	$R_m = -31,147$
$R_4 = -11,799541$	$D = -0,02627$	$R_s = -10,717$
$t_1 = 0,006944$	$l_H = 0,07821$	$R_p = -0,4954$
$t_2 = 0,013679$	$l_{H'} = 0,05635$	$\text{sph.} = 0,0,32917$
$t_3 = 0,011110$		$\text{comac.} = 0,013908$
		$\text{rel. dist.} = 0,849896$

$e_0 = 0,0522$	m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	0,8499	-31,15	240,3	-129,0
$G = +1$	79,10	-28,15	$3m_1$	$-e_0$
$G = -1$	1,648	-114,5	1576	260,5
$G = +\frac{5}{6}$	0,1852	-1,6822	4,1819	-2,8286



$e_o = 0,00238$		m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	0,2510		-15,24	146,0	-34,39
$G = +1$	47,68		-12,24	$3m_1$	$-e_o$
$G = -1$	0,4996		-57,95	1002	891,5
$G = +\frac{5}{6}$	0,0438		0,6374	1,9302	-1,4018



$e_o \approx -0,00645$ m_1 m_2 m_3 m_4

$G = 0$ $0,0625$ $-7,766$ $80,93$ m_4

$G = +1$ $25,98$ $-4,766$ $3m_1$ $-6,716$

$G = -1$ $0,1315$ $-30,30$ $567,4$ $-e_o$

$G = +\frac{5}{6}$ $0,0050$ $0,2544$ $0,8984$ $698,1$

$G = +0,01111$ $-0,6804$ $-0,6804$

rel. dist. = 0,062480

$e_o = -0,01209$		m_1	m_2	m_3	m_4
$G = 0$	0,0299		-1,778	-13,20	$0,8481$
$G = +1$	-5,401		1,222	$3m_1$	$-e_o$
$G = -1$	-0,0477		-7,434	-115,5	-137,7
$G = +\frac{5}{6}$	-0,0150		0,0007	0,0592	0,0791

$e_o \approx -0,00645$ m_1 m_2 m_3 m_4

$G = 0$ $0,00327$ $3^d sph.$ $0,000327$

$G = +1$ $-0,001551$ c $= 0,009002$

$G = -1$ $-1,778$ R_m $= 7,766$

$G = +\frac{5}{6}$ $-1,029$ R_s $= 3,042$

$G = -\frac{5}{6}$ $-0,6538$ R_p $= 0,6799$

$G = 0,000195$ $sph.$ $= -0,001512$

$G = 0,000764$ $comac.$ $= 0,004680$

$G = +0,029923$ $rel. dist.$ $= 0,029923$

rel. dist. = 0,029923

Étude et application d'un interféromètre à polarisation

par Maurice FRANÇON
Professeur à l'Institut d'Optique, Paris

SOMMAIRE. — On utilise un interféromètre formé par 2 lames de quartz taillées à 45° de l'axe optique et croisées puis interposées entre 2 polariseurs. On réalise une application très simple du dispositif à la microscopie. On remplace l'oculaire ordinaire du microscope par l'oculaire interférentiel qui transforme le microscope muni de ses objectifs normaux en microscope interférentiel.

En faisant varier un peu l'inclinaison de l'interféromètre on peut observer les objets transparents avec des contrastes colorés ou non. L'oculaire interférentiel s'applique sans changement au microscope métallographique. On indique ensuite des applications macroscopiques de cet interféromètre. L'une d'elles permet une réalisation des plus faciles pour l'étude des objets réfléchissants.

ZUSAMMENFASSUNG. — Es wird ein Interferometer der nachstehenden Bauart beschrieben : Eine Platte, die aus zwei in senkrechter Stellung miteinander verklebten Quarzplatten besteht, ist, unter 45° gegen die Achse geneigt, zwischen zwei Polarisatoren angeordnet. Für die Anwendung bei einem Mikroskop wird diese Anordnung in ein Mikroskop-Okular eingebaut. Unter Benutzung der normalen Objektive erhält man damit ein Interferenz-Mikroskop. Durch die Änderung des Winkels zwischen Quarzplatte und Achse kann man durchsichtige Objekte im ein- oder mehrfarbigen Kontrast beobachten. Das gleiche Interferenz-Okular lässt sich auch beim Metallmikroskop benutzen. Anschliessend werden einige andere Anwendungen der Interferenz-Anordnung angeführt. Eine äusserte einfache davon dient der Untersuchung von reflektierenden Objekten.

SUMMARY — An interferometer is described formed by two quartz plates cut at 45° to the axis and crossed, and interposed between two polarisers. A very simple arrangement for microscopy is achieved.

The ordinary microscope eye-piece is replaced by the interference eye-piece which transforms the ordinary microscope, with its normal objectives, into an interference microscope.

By small variations of the inclination of the interferometer, transparent objects can be observed with or without coloured contrast. The interference eye-piece can be used without modification for the metallurgical microscope. Some macroscopic applications of the interferometer are given. One of them gives a very simple method for the study of reflecting objects.

Parmi les nombreuses méthodes d'observation des objets transparents l'une des plus sensibles, le contraste de phase, rencontre quelques difficultés d'application lorsque les variations de phase introduites par l'objet sont lentes. La lumière diffractée s'écarte alors très peu de la direction du rayon lumineux éclairant l'objet et il devient difficile d'agir sur elle sans modifier également la phase de la lumière directe d'éclairage. D'autre part, la lame de phase obture toujours plus ou moins le faisceau diffracté de sorte que les images sont entourées de franges de diffraction parasites. Pour ces différentes raisons nous avons orienté nos recherches, au début de 1951, vers les méthodes interférentielles. Ces dernières méthodes permettent d'éviter les inconvénients précédents mais sont en général d'un emploi beaucoup plus délicat. Les systèmes basés sur le principe des interféromètres à ondes multiples FABRY-PÉROT exigent généralement de la lumière monochromatique et des surfaces très bien traitées.

Les franges de superposition permettent l'emploi de la lumière blanche mais leur application dans différentes techniques, notamment en microscopie, est loin d'être aisée.

C'est pourquoi nous avons fixé notre choix sur un interféromètre à polarisation dans lequel les faisceaux interférents sont obtenus d'une façon très simple et dont les applications ne présentent pas de difficulté, spécialement en microscopie.

Le principe de l'interféromètre est le suivant : lorsqu'une onde plane monochromatique polarisée rectilignement tombe à 45° des axes d'un polariscope de Savart, on obtient 2 ondes polarisées à angle droit et situées dans un même plan si le faisceau lumineux est normal aux lames biréfringentes. On a donc 2 ondes en phase seulement décalées l'une par rapport à l'autre dans leur plan commun par suite de la biréfringence

des lames. En inclinant celles-ci ou en employant un compensateur, on peut introduire une différence de phase convenable pour que ces 2 ondes se détruisent par interférences. Supposons qu'il en soit ainsi pour le jaune moyen du spectre et éclairons l'ensemble en lumière blanche. En plaçant un analyseur après les lames on obtient une teinte générale pourpre ou teinte sensible. Considérons maintenant non plus une onde plane, mais une onde déformée par la présence d'un objet transparent. Par suite de leur décalage latéral, ces 2 ondes n'arrivent plus en opposition pour le jaune dans tout le champ d'observation. La teinte sensible varie rapidement dans certaines régions décelant ainsi les déformations de l'onde incidente, c'est-à-dire de l'objet.

1. Description de l'interféromètre. — L'interféromètre est constitué par 2 lames à faces parallèles identiques taillées dans un cristal biréfringent uniaxe à 45° de l'axe optique. Les 2 lames sont croisées puis collées et interposées entre un polariseur et un analyseur.

Soit SI un rayon incident polarisé rectilignement (fig. 1 a). A partir de I et dans la première lame le rayon

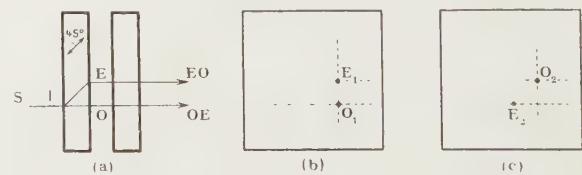


FIG. 1.

incident donne naissance à 2 rayons : le rayon ordinaire O et le rayon extraordinaire E. Le rayon O vibre perpendiculairement au plan de figure et le rayon E dans le plan de figure.

Comme la deuxième lame est croisée avec la première, les vibrations ordinaires issues de la première lame sont dans le plan de section principale de la deuxième lame et deviennent extraordinaires. Les vibrations extraordinaires issues de la première lame sont dirigées perpendiculairement au plan de section principale de la deuxième lame et deviennent ordinaires. Si le rayon incident est normal aux lames, l'avance prise par le rayon ordinaire sur le rayon extraordinaire dans la première lame (cas du quartz) est compensé exactement par le retard qu'il prend comme rayon extraordinaire dans la deuxième lame. Finalement les 2 rayons émergents sortent du système « en phase ».

Nous appellerons rayon ordinaire-extraordinaire le rayon qui, ordinaire dans la première lame, est extraordinaire dans la seconde. De même le rayon extraordinaire-ordinaire est extraordinaire dans la première lame et ordinaire dans la seconde. Les figures 1 b et 1 c représentent les traces des rayons ordinaire-extraordinaire et extraordinaire-ordinaire sur un plan de front à la sortie de la première et de la deuxième lame. Le décalage latéral O_1E_1 produit par la première lame (fig. 1 b), par exemple vertical, devient horizontal dans la seconde lame (fig. 1 c). Celle-ci ne change pas le rayon E_1 (fig. 1 b) qui devient O_2 (fig. 1 c) mais déplace le rayon O_1 (fig. 1 b) qui vient en E_2 (fig. 1 c). Comme nous l'avons déjà dit, si le rayon incident S_1 est normal aux lames, les 2 rayons émergents OE et EO sortent en phase. Ceci a lieu quelle que soit la longueur d'onde, de sorte qu'entre polariseurs croisés on n'a pas de lumière transmise et au contraire de la lumière blanche entre polariseurs parallèles.

Si on incline l'interféromètre, alors les rayons OE et EO sont déphasés d'une quantité qui est proportionnelle à l'inclinaison.

2. Fonctionnement.

a) *Méthode du dédoublement total.* — Nous supposons l'objet transparent plus petit que le dédoublement O_2E_2 produit par l'interféromètre (fig. 1 c).

Considérons un objet AC transparent, par exemple une lame de verre comportant en M une petite région d'épaisseur optique différente du reste de la lame (fig. 2).

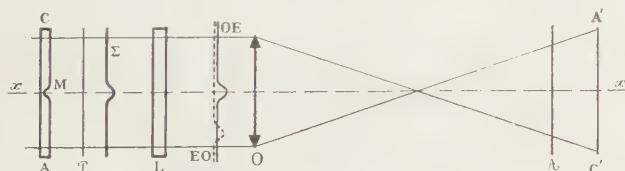


FIG. 2.

L'objet AC est éclairé par un faisceau de lumière parallèle et on observe l'image $A'C'$ de AC donnée par un système optique O. Indiquons tout de suite que AC peut être l'objet lui-même ou une image donnée par un système optique non représenté. On place l'interféromètre L entre l'objet AC et O. La lumière incidente est polarisée rectilignement par un polariseur P qui

peut être placé n'importe où, pourvu que ce soit avant L ; l'objet peut donc être éclairé en lumière naturelle. L'analyseur peut être également placé à un endroit quelconque pourvu que ce soit après l'interféromètre L. Avant de traverser L l'onde incidente Σ est une onde plane, sauf dans sa partie centrale où elle est légèrement déformée par suite de la variation correspondante de l'épaisseur optique de l'objet dans cette région. Après traversée de L, l'onde Σ est dédoubleée en 2 ondes polarisées à angle droit OE et EO correspondant aux rayons OE et EO . Le décalage de ces 2 ondes dans un sens perpendiculaire à xx' est dû à la biréfringence de L et le décalage dans le sens xx' à la différence de marche produite par L.

Inclinons légèrement l'interféromètre L de façon que dans les régions planes sans objet, les 2 ondes OE et EO (fig. 3) présentent entre elles une différence de

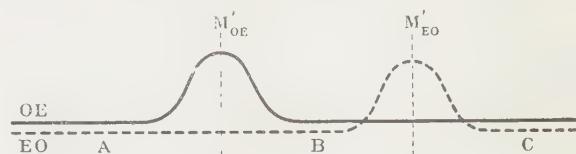


FIG. 3.

marche $\lambda/2$ pour le jaune moyen du spectre. Comme nous avons choisi une biréfringence assez forte, les régions M'_oe et M'_eo déformées par l'objet ne se recouvrent pas. Opérons entre polariseurs parallèles.

Les régions A, B et C entourant l'image ordinaire-extraordinaire M'_oe et l'image extraordinaire-ordinaire M'_eo , c'est-à-dire les régions sans objet où les ondes sont planes, présentent la teinte sensible pourpre du premier ordre. Par contre, dans les régions M'_oe et M'_eo il n'en est plus ainsi. La différence de marche devient $\lambda/2$ plus ou moins la différence de marche Δ introduite par l'objet, la teinte sensible vire immédiatement en donnant directement la structure de l'objet. La couleur de l'image ordinaire-extraordinaire est différente de celle de l'image extraordinaire-ordinaire car la différence de marche est $\lambda/2 + \Delta$ en M'_oe et $\lambda/2 - \Delta$ en M'_eo .

Si, par exemple, $\Delta = 0,015 \mu$ on aura les différences de marche :

$$\begin{aligned} \text{en } M'_oe : & 0,295 \mu, \quad \text{couleur indigo,} \\ \text{en } M'_eo : & 0,265 \mu, \quad \text{couleur rouge carmin.} \end{aligned}$$

Les teintes sont « symétriques » par rapport à la teinte sensible.

Naturellement les couleurs ne seront pas les mêmes en tous les points de l'image M'_oe ou M'_eo par suite de la structure de l'objet déphasant. Leur simple examen permettra de déterminer avec précision la distribution des phases. Pour obtenir les couleurs les plus vives, donc le meilleur contraste, il faudra orienter la vibration incidente à 45° des sections principales du polariscope, l'analyseur étant parallèle ou perpendiculaire au polariseur.

On peut obtenir également une sensibilité considérable en opérant de la façon suivante : laissons travailler

l'interféromètre sous l'incidence normale, les ondes OE et EO sortent en phase et décalées dans leur plan commun. Si le polariseur et l'analyseur sont croisés, on est en opposition pour toutes les radiations : on a un véritable fond noir central. Inclinons très légèrement l'interféromètre de façon à introduire une faible différence de phase — θ entre les ondes OE et EO. Tout se passe comme si on opérait en contraste de phase avec forte absorption. En effet, l'amplitude complexe dans l'image M'_{OE} peut être représentée par $e^{i\varphi}$, où φ est la phase introduite par l'objet. On lui superpose l'onde EO de même amplitude et presque en opposition. L'amplitude finale dans l'image sera, à un facteur de proportionnalité près,

$$e^{i\varphi} - e^{-i\theta} \approx 1 + i\varphi - \cos \theta + i \sin \theta$$

en supposant φ petit. L'intensité dans l'image M'_{OE} sera alors

$$I_1 = 2 - 2 \cos \theta + 2 \varphi \sin \theta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \varphi \sin \theta.$$

Dans les régions A ou B (fig. 3) l'intensité sera

$$I_2 = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

d'où un contraste

$$\gamma = \frac{I_1 - I_2}{I_1} \approx \frac{\varphi}{\tan \theta/2}$$

qui est égal à $2\varphi/\theta$ si $2\varphi \ll \theta$. En donnant à θ des petites valeurs, on a un fort contraste pour toutes les radiations. Le contraste maximum 4 est obtenu lorsque $\theta = 2\varphi$. Si θ tend vers zéro, cette formule n'est évidemment plus valable.

La méthode du dédoublement total conviendra bien si l'objet observé n'est pas trop grand. Dans le cas contraire il y aura recouvrement d'une partie des images OE et EO. L'image observée reste parfaitement nette, mais son interprétation devient plus difficile. On peut alors employer le procédé décrit ci-après.

b) Méthode différentielle. — Nous supposons maintenant le dédoublement, dû à la biréfringence, petit devant les dimensions de l'objet.

Considérons le même objet que précédemment : après traversé de l'interféromètre, les 2 ondes OE et EO ont la disposition de la figure 4. Nous inclinons l'in-

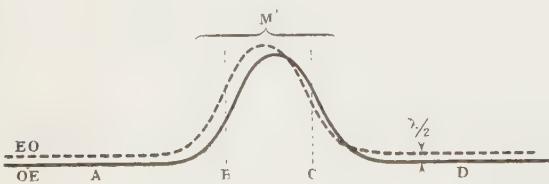


FIG. 4.

terféromètre de façon que, dans les régions planes A et D, la distance des 2 ondes c'est-à-dire leur différence de marche soit par exemple $\lambda/2$. Si on opère entre polariseurs parallèles les régions A et D entourant l'image M' d'un détail déphasant de l'objet AD présentent la

teinte sensible pourpre du premier ordre. Par contre dans la région de l'image M' elle-même, il n'en est plus ainsi. En B et C par exemple, par suite du décalage latéral, la différence de marche entre les 2 ondes OE et EO est modifiée, la teinte sensible vire immédiatement, décelant ainsi les « pentes » de l'objet déphasant. Si les variations de phase sont symétriques, la différence de marche en B est un peu plus grande que $\lambda/2$ et en C un peu plus petite que $\lambda/2$; les différences par rapport à $\lambda/2$ étant égales en valeur absolue, on observe des teintes « symétriques » par rapport à la teinte sensible comme précédemment. On conçoit que, si le décalage latéral n'est pas trop grand, l'ensemble des 2 ondes OE et EO moule l'objet avec une précision suffisante pour que l'image donne une représentation conforme de l'objet. Le procédé différentiel tel que nous venons de le décrire a déjà été utilisé par différents auteurs et avec divers types d'interféromètres. Nous avons généralisé ce procédé en microscopie en choisissant un décalage fixé une fois pour toutes à une valeur de l'ordre de grandeur du pouvoir séparateur de l'instrument d'observation placé derrière le polariscope. Ceci est justifié par le fait que la plupart des préparations microscopiques étant fortement déphasantes un petit dédoublement donne une sensibilité suffisante. On est conduit à réaliser ainsi un instrument très simple, « l'oculaire interférentiel », que nous allons décrire.

3. Application à la microscopie : oculaire interférentiel. — L'application de l'interféromètre en microscopie est très simple car rien n'empêche de placer les 2 lames biréfringentes dans l'oculaire du microscope. Ce dernier peut donc travailler avec ses objectifs ordinaires ; il suffit simplement de remplacer l'oculaire normal d'observation par l'oculaire interférentiel. Le schéma de montage sur le microscope en lumière transmise est indiqué sur la figure 5 ; l'appareil peut être

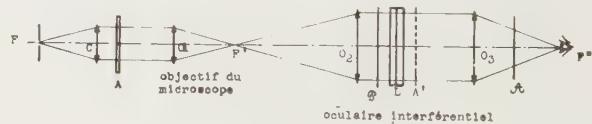


FIG. 5.

parfaitement adapté à un microscope métallographique.

Dans le plan focal du condenseur C se trouve une fente F jouant le rôle de source lumineuse. L'objet A, traversé par un faisceau de rayons parallèles, est observé au moyen du microscope proprement dit composé de l'objectif O_2 et de l'oculaire interférentiel.

Ce dernier comprend un verre de champ O_3 dont le foyer coincide avec le foyer image F' de l'objectif du microscope.

L'interféromètre L placé après O_2 est ainsi traversé par un faisceau de lumière parallèle. Un oculaire O_3 de type ordinaire permet d'observer l'image A' de l'objet transparent A. Le polariseur P sera placé juste

avant L de façon que l'objet soit éclairé en lumière blanche naturelle. L'analyseur A étant interposé entre le verre d'œil de l'oculaire et l'œil de l'observateur.

En principe rien n'empêche d'utiliser le procédé du dédoublement total mais en microscopie la plupart des préparations sont constituées par des objets compliqués et, par suite du chevauchement des images, on obtient des restitutions qui n'ont aucun rapport avec l'objet lui-même. Comme ce procédé ne peut être employé que dans des cas bien déterminés et assez rares, nous nous sommes limité à l'emploi de la méthode différentielle de façon à réaliser un appareil simple utilisable dans tous les cas. Si la méthode différentielle est moins sensible que le dédoublement total, ce qui n'est d'ailleurs pas très important en microscopie où les déphasages sont généralement assez forts, elle a par contre l'avantage d'une extrême facilité d'emploi.

Dans l'oculaire interférentiel, le dédoublement sera donc de l'ordre de grandeur du pouvoir séparateur de l'œil associé à l'oculaire d'observation O_3 . De ce fait il ne sera pas visible et l'instrument pourra servir à observer n'importe quel objet transparent avec une sensibilité bien suffisante.

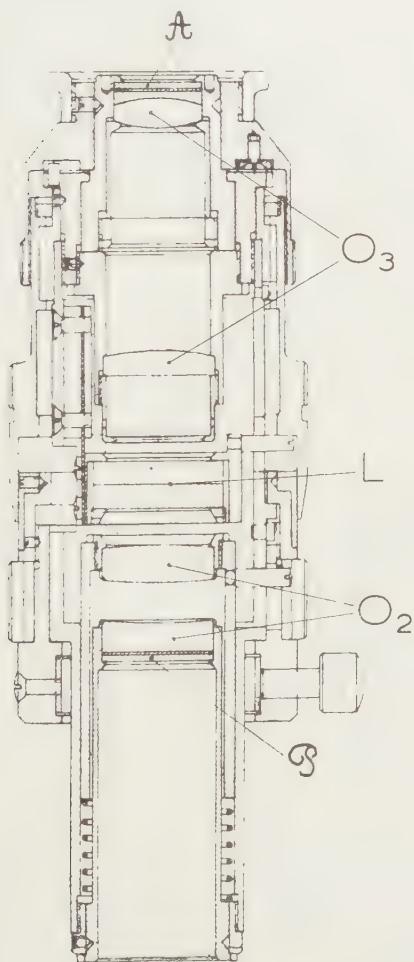


FIG. 6. — Coupe de l'oculaire interférentiel O. P. L.
(Optique et Précision de Levallois).

Pour pouvoir adapter l'oculaire interférentiel à un quelconque objectif de microscope il faut faire coïncider le foyer image F' de l'objectif utilisé avec le foyer objet du premier verre O_2 de l'oculaire interférentiel. On peut alors remplacer O_2 par 2 lentilles d'écartement variable. En changeant leur distance on change la position du foyer de la combinaison et on peut ainsi réaliser très facilement la coïncidence sans déplacer l'ensemble de l'oculaire interférentiel (fig. 6).

Une autre solution consiste à utiliser un système optique O_2 ne comportant qu'un verre de position fixe par rapport aux autres éléments de l'oculaire interférentiel. On peut déplacer ce dernier en le faisant coulisser dans un tube fixé lui-même dans le porte-oculaire du microscope. De petits déplacements suffisent pour ajuster le foyer de O_2 à n'importe quel objectif normal (fig. 7).

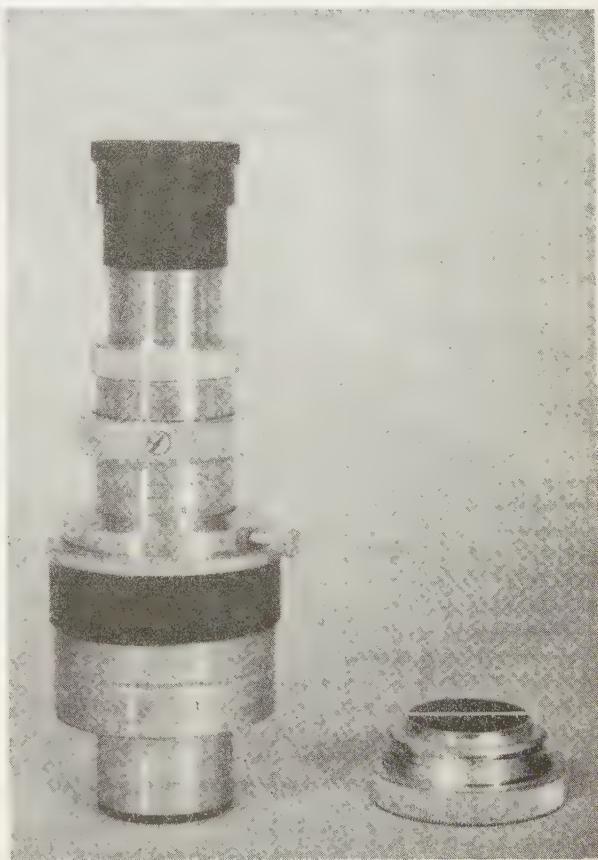


FIG. 7. — Oculaire interférentiel B. B. T.
(Barbier, Bénard et Turenne).

Les lames biréfringentes constituant l'interféromètre sont deux lames de quartz taillées à 45° de l'axe optique et orientées à 90° l'une de l'autre et à 45° du plan de polarisation de la lumière. L'épaisseur de l'ensemble des 2 lames de quartz est égale à 6,8 mm et l'oculaire O_3 placé derrière a un grossissement qui ne dépasse pas 8 environ.

La variation de la différence de marche entre les

2 ondes OE et EO est obtenue par simple inclinaison des lames de quartz autour d'un axe perpendiculaire à l'axe optique du microscope. L'inclinaison maximum qui ne dépasse pas 1 à 2 degrés par rapport à la position normale est obtenue par rotation d'une bague.

Croisons les polariseurs et réglons l'inclinaison de l'interféromètre pour que les lames de quartz soient perpendiculaires au faisceau de rayons parallèles transmis par O₂.

Les régions où la phase varie sont perçues comme sur un fond noir central. Inclinons très peu l'interféromètre : les régions où la phase varie sont vues maintenant comme avec un contraste de phase. La sensibilité est très bonne et dépend des petits changements d'inclinaison que l'on donne au voisinage de cette position : tout se passe comme avec un contraste de phase à absorption variable. Inclinons un peu plus l'interféromètre, un blanc uniforme remplit le champ et les images disparaissent. Puis la teinte sensible, c'est-à-dire le pourpre, apparaît. L'objet transparent se détache alors avec des couleurs très vives. En continuant à incliner l'interféromètre toutes les couleurs de l'échelle des teintes défilent mais la sensibilité diminue.

On peut également utiliser tous les contrastes colorés fournis par l'interféromètre entre polariseurs parallèles.

Astigmatisme des images. — L'onde ordinaire donnée par la première lame de quartz devient extraordinaire dans la seconde et de ce fait est entachée d'astigmatisme. L'onde extraordinaire devenant ordinaire dans la deuxième lame, son astigmatisme n'est pas modifié et finalement les 2 images de l'objet que l'on observe sont entachées du même astigmatisme. Les rayons de courbure principaux sont intervertis, mais les distances d'astigmatisme sont les mêmes pour les 2 images. C'est l'astigmatisme introduit par une lame de quartz taillée à 45° de l'axe.

Un pinceau normal de rayons lumineux issu de M (fig. 8) donne un pinceau de rayons ordinaires pour

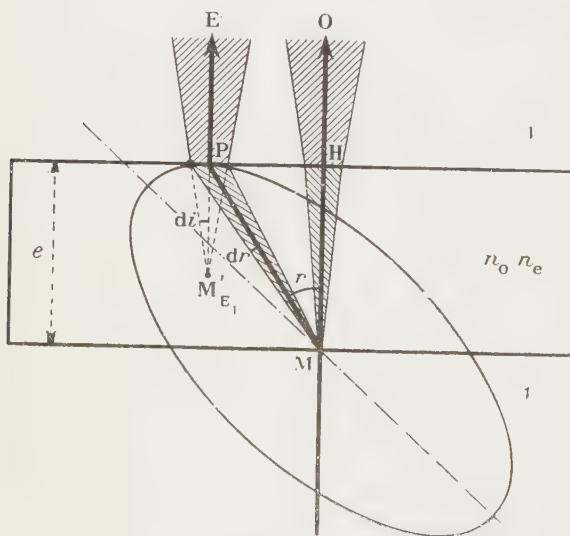


FIG. 8.

lequel la lame de quartz peut être considérée comme isotrope et un pinceau de rayons extraordinaire qui, après traversée de la lame, s'appuie sur 2 focales, l'une perpendiculaire à la section principale, l'autre dans cette section.

Le plan de la figure 8 est le plan de section principale.

Soient e l'épaisseur de la lame, n_o et n_e les indices ordinaire et extraordinaire. La distance $PM'E_1$ à la face d'émergence de la focale normale à la section principale est

$$PM'E_1 = \frac{2\sqrt{2n_o n_e}}{(n_o^2 + n_e^2)^{3/2}} e.$$

La distance $PM'E_2$ de la focale située dans la section principale est

$$PM'E_2 = \frac{\sqrt{2}n_o}{n_e\sqrt{n_o^2 + n_e^2}} e.$$

La distance entre les 2 focales, c'est-à-dire la distance d'astigmatisme, est donc

$$s - t = PM'E_1 - PM'E_2 = \frac{\sqrt{2}(n_e^2 - n_o^2)n_o}{n_e(n_o^2 + n_e^2)^{3/2}} e.$$

Pour que l'astigmatisme ne soit pas gênant, il suffit d'écrire que la distance $s - t$ est plus petite que la distance tolérable déduite de la règle de l'écart quadratique moyen.

Si α est l'ouverture numérique dans l'espace image de l'objectif du microscope, on a

$$\frac{\sqrt{2}(n_e^2 - n_o^2)n_o}{n_e(n_o^2 + n_e^2)^{3/2}} e \leq \frac{\lambda}{\sqrt{2}\alpha^2},$$

dans le cas du quartz

$$e \leq \frac{0,11}{\alpha^2}.$$

Pour $e = 3$ mm il faut que α ne dépasse pas la valeur 0,20 ce qui est toujours réalisé. Dans l'oculaire interférentiel l'astigmatisme est donc négligeable grâce à la faible ouverture des faisceaux dans l'espace image d'un microscope.

Détermination de l'épaisseur des lames biréfringentes et de la fente source. — On sait que l'angle maximum ω du rayon extraordinaire avec la normale à l'onde extraordinaire est donné par

$$\operatorname{tg} \omega : \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_s^2 + n_o^2},$$

d'où un dédoublement $d = \omega e = 5 \cdot 10^{-3} e$ entre les images ordinaire et extraordinaire pour le quartz. Du fait que nous superposons deux lames croisées, le dédoublement sera $d' = d\sqrt{2} = 7 \cdot 10^{-3} e$ pour le quartz.

Un dédoublement $d' = 0,02$ mm donné par 2 lames de quartz de 3 mm d'épaisseur est à la limite de visibilité dans un oculaire de grossissement 7 et c'est la rai-

son pour laquelle nous avons choisi une épaisseur de cet ordre dans l'oculaire interférentiel.

Quant au diaphragme placé dans le plan focal du condenseur et qui joue le rôle de source lumineuse, il doit avoir une forme et une largeur qui dépendent de la structure des lignes isochromatiques des 2 lames de quartz. Considérons la figure 5 et observons au moyen d'une loupe le plan focal de l'oculaire O_3 . On voit toute une série de franges colorées rectilignes et parallèles, ce sont les lignes isochromatiques ou encore les franges à l'infini des deux lames de quartz. Si les polariseurs sont croisés on a, au centre, une frange noire bordée de chaque côté par les franges colorées. Si les polariseurs sont parallèles la frange centrale est blanche.

Soit i l'angle d'incidence des rayons sur les lames de quartz (fig. 9).

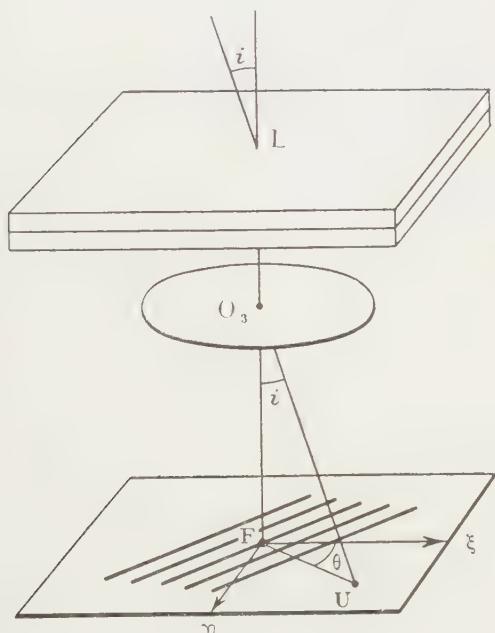


FIG. 9.

Etudions les phénomènes dans le plan focal F de l'objectif θ , $\xi\eta\zeta$ étant un système d'axes situés dans ce plan et parallèles aux lignes neutres des lames, c'est-à-dire à 45° de la direction des vibrations incidentes. Les coordonnées d'un point U du plan focal, correspondant à un angle d'incidence i sur la lame, sont

$$\xi = \sin i \cos \theta, \quad \eta = \sin i \sin \theta$$

et la différence de marche Δ_1 entre l'onde extraordinaire et l'onde ordinaire pour une incidence i , en supposant que la première lame de quartz agisse seule, est

$$\Delta_1 = e \left\{ \frac{\sqrt{2} n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 + n_e^2}} - n_o \right\} \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_e^2 + n_o^2} \frac{\xi}{\eta^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{n_o} - \frac{\sqrt{2} n_e}{n_o \sqrt{n_o^2 + n_e^2}} \right) \eta^2 + \left(\frac{1}{n_o} - \frac{2\sqrt{2} n_o n_e}{(n_o^2 + n_e^2)^{3/2}} \right) \xi^2 \right] \right\}.$$

Si la deuxième lame de quartz agissait seule, en l'orientant à 90° de l'autre, la différence de marche Δ_2 qu'elle introduirait s'obtiendrait en remplaçant dans l'expression précédente η par ξ et ξ par $-\eta$. Si les 2 lames sont superposées, leurs sections principales étant croisées, la différence de marche Δ due à l'ensemble est la différence entre Δ_1 et Δ_2 . On a

$$\Delta = e \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_e^2 + n_o^2} (\xi + \eta).$$

Les lignes isochromatiques sont les droites $\xi + \eta = \text{Cte}$.

Le diaphragme placé dans le plan focal du condenseur sera donc une fente orientée parallèlement aux franges à l'infini des lames de quartz.

Pour le quartz on a

$$\Delta = 0,00587 (\xi + \eta) e.$$

Les polariseurs étant croisés, on aura le pourpre du premier ordre pour $\Delta = 0,560 \mu$. A cet endroit il y aura le premier minimum des franges en lumière jaune $0,560 \mu$ et sa distance angulaire v à l'axe sera, en posant $\xi + \eta = v \sqrt{2}$,

$$v = 0,068/e \text{ mm};$$

le tableau suivant donne les valeurs de v pour quelques épaisseurs en mm des lames de quartz.

$e = 1 \text{ mm}$	$v = 309^\circ$
$e = 2 \text{ mm}$	$v = 109^\circ$
$e = 3 \text{ mm}$	$v = 103^\circ$
$e = 4 \text{ mm}$	$v = 58^\circ$

Admettons comme tolérable une largeur de source telle que d'un bord à l'autre on passe de $\Delta = 0,545 \mu$ (rouge foncé) à $\Delta = 0,475 \mu$ (violet), soit une variation de $0,03 \mu$. Puisque l'écartement de 2 franges jaunes est égal à $0,560 \mu$ en différence de marche, une variation de $0,03 \mu$ correspondra à une fente de largeur angulaire égale à $1/20$ environ de l'écartement de 2 franges.

Précision. — Supposons que dans une région de l'objet la variation de phase soit représentée par la courbe de la figure 10. Dans les régions AB et CD la

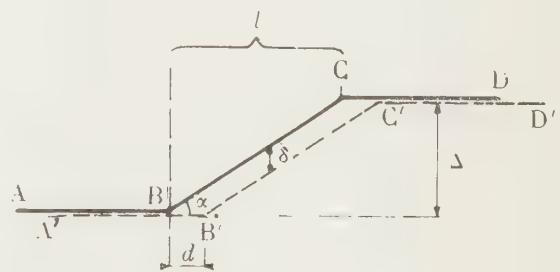


FIG. 10.

phase est constante sauf dans la région BC qui les relie. La variation de phase est, par exemple, le bord d'un objet transparent. Par suite du dédoublement dû à l'interféromètre, on a dans l'image une deuxième courbe A'B'C'D' déduite de ABCD par une simple translation $BB' = d$ égale au dédoublement d . Soit

Δ la différence de marche entre les régions AB et CD,
 l la largeur de la région dans laquelle s'étend la variation BC de la différence de marche produite par l'objet.

On a

$$\Delta = l\alpha,$$

α étant la « pente » du chemin optique dans la région BC.

Les 2 courbes ABCD et A'B'C'D' représentent également les 2 ondes OE et EO dans l'image et leur différence de marche dans la région BC est

$$\delta = d\alpha = \frac{d}{l} \Delta.$$

Si on incline un peu les lames de quartz la distance des 2 ondes dans les régions AB et CD n'est plus nulle. Supposons qu'elle soit égale à $\lambda/2$ pour le jaune et opérons entre polariseurs parallèles. Dans les régions AB et CD la différence de marche est $\lambda/2$ et dans la région BC elle est

$$\frac{\lambda}{2} \pm \frac{d}{l} \Delta,$$

la teinte vire dans la région BC. En admettant qu'un changement de teinte correspondant à $\lambda/500$ soit perceptible, on a donc

$$\frac{d}{l} \Delta = \frac{\lambda}{500},$$

d'où

$$\Delta = \frac{l}{d} \frac{\lambda}{500}.$$

Considérons ce qui se passe dans le plan image A' (fig. 5). Nous avons $d = 0,02$ mm donc pour une variation du chemin optique s'étendant sur $l = 0,1$ mm on pourra mettre en évidence une différence de marche égale à $\lambda/100$. Si la variation s'étend sur 1 mm on aura alors $\lambda/10$. Au lieu d'employer la teinte sensible on peut régler l'inclinaison des lames au voisinage de la position normale, les variations de phase sont vues comme en contraste de phase et la sensibilité est encore meilleure. Notons que pour un objet déterminé on aura toujours intérêt à prendre le grossissement le plus faible compatible naturellement avec les dimensions du détail étudié. A partir du grossissement minimum permettant de voir le détail, toute augmentation du grossissement de l'objectif produirait une baisse du contraste des images.

4. Applications aux études macroscopiques.

a) *Objets réfléchissants.* — Nous avons étudié un montage extrêmement simple pour l'étude à faible grossissement des objets réfléchissants (fig. 11).

La source lumineuse est une lampe opale ordinaire \mathcal{L} devant laquelle on place un polariseur \mathcal{P} . La lumière est réfléchie par une lame semi-réfléchissante G inclinée, à 45° traverse l'interféromètre L, se réfléchit sur l'objet A à étudier, traverse à nouveau l'interféromètre L, la lame G et tombe sur une loupe O.

La pupille de l'œil est placée au foyer de la loupe O qui sert à observer la surface à étudier A. L'analyseur \mathfrak{A} est interposé entre G et l'œil. L'avantage de la double traversée des lames de quartz est l'élargissement

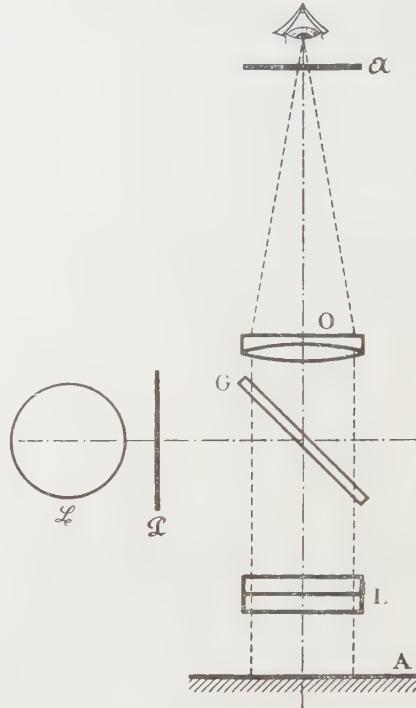


FIG. 11.

ment considérable des franges à l'infini. Sans diminution de la bérifringence de l'interféromètre L sur le trajet de la lumière après réflexion sur A, il y a compensation sur les 2 trajets aller et retour. On peut alors s'affranchir de la condition de parallélisme des rayons traversant l'interféromètre et éclairer le système par une simple lampe opale. En effet après la première traversée de l'interféromètre la différence de marche entre l'onde extraordinaire et l'onde ordinaire est

$$\Delta = e \left\{ \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_e^2 + n_o^2} (\zeta + \eta) + \left[\frac{\sqrt{2} n_o n_e}{(n_o^2 + n_e^2)^{3/2}} - \frac{n_o}{n_e \sqrt{2(n_o^2 + n_e^2)}} \right] (\xi^2 - \eta^2) \right\}.$$

Par suite de la réflexion, tout se passe comme si on avait un deuxième interféromètre tourné de 180° dans son plan par rapport au précédent. Le retard produit par ce deuxième interféromètre fictif est

$$\Delta' = e \left\{ \frac{n_e^2 - n_o^2}{n_e^2 + n_o^2} (\zeta + \eta) - \left[\frac{\sqrt{2} n_o n_e}{(n_o^2 + n_e^2)^{3/2}} - \frac{n_o}{n_e \sqrt{2(n_o^2 + n_e^2)}} \right] (\xi^2 - \eta^2) \right\}.$$

Finalement le retard total produit par la double traversée de l'interféromètre sera

$$\Delta'' = \Delta - \Delta' = \frac{e n_o \sqrt{2(n_e^2 - n_o^2)}}{n_e(n_o^2 + n_e^2)^{3/2}} (\xi^2 - \eta^2).$$

Les lignes isochromatiques constituent maintenant un double faisceau d'hyperboles équilatères. Les asymptotes situées à 45° des axes O ξ et O η sont noires entre polariseurs croisés (fig. 12). En changeant un peu l'in-

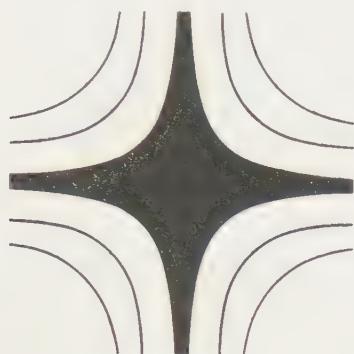


FIG. 12.

clinaison de l'interféromètre, on peut faire défiler toutes les teintes au centre du champ. Pour un interféromètre en quartz la distance du centre de la croix noire à la première frange pourpre est égale angulairement à

$$\xi = \frac{0,4}{\sqrt{e} \text{ mm}} :$$

avec un seul interféromètre on aurait eu

$$\xi' = \frac{0,07}{e \text{ mm}} .$$

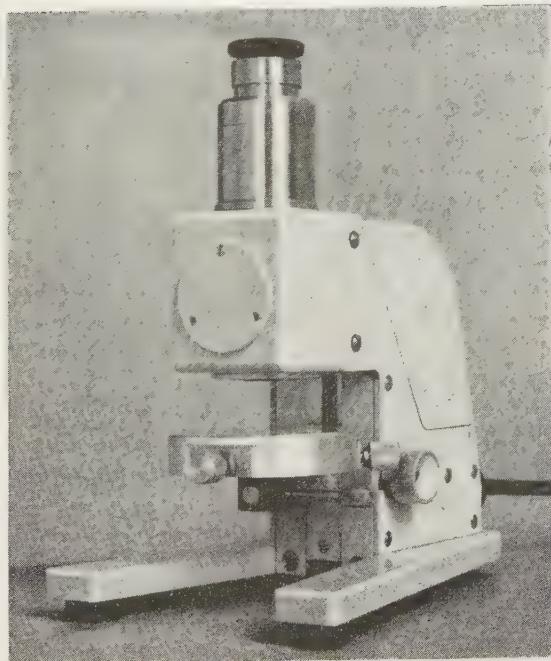


FIG. 13. — Interféroscope Jobin et Yvon.

Avec un interféromètre de 10 mm d'épaisseur ($e = 5 \text{ mm}$), $\xi = 0,18$ et $\xi' = 0,014$, on peut donc utiliser une source 13 fois plus large. Ceci permet d'éliminer toute collimation, la diaphragmation par l'œil étant largement suffisante.

On peut noter que la lumière parasite réfléchie par la face supérieure de L est arrêtée car \mathcal{P} et \mathcal{A} sont croisés.

Quant à la lumière qui est réfléchie par la face inférieure de l'interféromètre, ayant traversé 2 fois L elle donne sur la pupille les hyperboles à centre noir, donc pas de lumière parasite.



FIG. 14. — Surface de verre : poli rouge au papier (juste poli).

Dans l'appareil réalisé (fig. 13) l'interféromètre en quartz a une épaisseur totale égale à 15 mm et un diamètre de 25 mm qui est le diamètre du champ d'observation. C'est également le diamètre de la loupe qui a 55 mm de longueur focale environ. Les figures 14, 15 et 16 montrent des surfaces de verre polies de différentes façons.



FIG. 15. — Surface de verre poli au papier (poli fin).

b) *Objets transparents de grandes dimensions.* — Lorsque l'on a à examiner de grandes surfaces on peut employer le montage indiqué par la figure 17. Une fente

F qui joue le rôle de source lumineuse est placée au centre d'un miroir sphérique concave M.

On incline légèrement le miroir M et après réflexion sur un petit miroir plan auxiliaire m les rayons convergent en F' image de F. L'image F' est au foyer d'un objectif O₁ de sorte que les rayons émergents forment un faisceau de rayons parallèles.

On place ensuite le polariseur P, l'interféromètre L



FIG. 16. — Surface de verre poli par oxalate de fer.

et une loupe O₂ qui sert à examiner l'image A' de la région A se trouvant devant le miroir M. L'objet transparent à étudier se trouve en A. L'analyseur peut être interposé entre O₂ et l'œil de l'observateur. L'objet est ici traversé deux fois par les rayons lumineux ; si l'on veut qu'il ne soit traversé qu'une fois on peut alors employer le montage représenté par la figure 18. La

fente F est placée au foyer d'un objectif D dont les dimensions sont aussi grandes que celle de l'objet à étudier. Un deuxième objectif D₂ de même diamètre environ que D₁ fait converger la lumière en F' image de la fente F.

A partir de là le montage est identique au montage précédent.

L'objectif O₁ dans le montage de la figure 17 ou



FIG. 17.

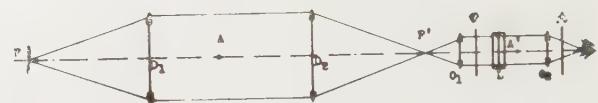


FIG. 18.

l'ensemble des objectifs D₂ et O₂ dans le montage de la figure 18 donnent une image A' plus petite que l'objet A de façon à pouvoir utiliser un petit interféromètre L. Pour un interféromètre donné on peut faire varier à volonté le dédoublement en changeant la focale de l'objectif O₁.

Manuscrit reçu le 30 avril 1953.

Saturation of the rod mechanism of the retina at high levels of stimulation

M. AGUILAR & W.S. STILES

National Physical Laboratory, Teddington

SUMMARY. — By means of the two-colour threshold method the threshold response of the rod or dark-adapting visual mechanism can be followed to relatively high field intensities. From the results obtained here by this method it is concluded that at a field intensity of about 100 scotopic trolands the sensitivity of the rod mechanism to stimulus differences begins to fall off rapidly and that at about 2 000 to 5 000 scotopic trolands (corresponding approximately to daylight luminances of 120 to 300 cd/m²) the rod mechanism becomes saturated and is no longer capable of responding to an increase of stimulus.

SOMMAIRE. — En utilisant la méthode du seuil bicolore, la limite de perception des bâtonnets ou mécanisme visuel pour l'obscurité peut être étudiée pour des intensités du champ relativement élevées.

D'après les résultats obtenus par cette méthode, on conclut que, pour une intensité du champ d'environ 100 trolands scotopiques, la sensibilité des bâtonnets aux variations d'excitation commence à baisser rapidement et que, pour 2 000 à 5 000 trolands scotopiques (correspondant approximativement à des luminances de 120 à 300 cd/m² en lumière du jour) les bâtonnets se saturent et ne peuvent plus répondre à une augmentation de l'excitation.

ZUSAMMENFASSUNG. — Mittels der Methode der Zwei-Farben-Schwelle kann die Schwellenempfindlichkeit der Stäbchen oder des Dunkelsehapparates des Auges bis zu relativ hohen Feldhelligkeiten verfolgt werden.

Die Ergebnisse, die mit dieser Methode erhalten werden, lassen schliessen, dass bei Feldhelligkeiten von etwa 100 skotopischen Troland die Empfindlichkeit des Stäbchenapparates für die Reizunterschiede schnell nachlässt und dass bei 2 000-5 000 skotopischen Troland (näherungsweise bei einer Tageslicht-Leuchtdichte von 120-300 cd/m²) der Stäbchenapparat abgesättigt ist und auf eine weitere Steigerung des Reizes nicht anspricht.

Introduction. — It was suggested by one of us [9] that at sufficiently high levels of stimulation the rod mechanism of the retina may approach saturation in the sense that even a large increase in the stimulus produces no perceptible increase in the response. This suggestion rested on measurements by the two-colour threshold method on one subject only [8]. In the present work, measurements on similar lines have been made on a group of four subjects, the conditions being chosen to enable the response of the rod mechanism to be followed to the highest possible level before the intervention of the cone mechanism. The results strongly support the view that the rod mechanism approaches saturation at a scotopic luminance of between 2 000 and 5 000 scotopic trolands. (The scotopic troland is defined in the same way as the ordinary troland : it is the stimulus, or « retinal illumination », corresponding to a scotopic luminance of one scotopic candela per sq. metre seen through an artificial pupil of 1 sq. mm.).

Theory of the method. — In accordance with the general principle of the two-colour threshold technique, the retinal area under study — in the present case an extra-foveal area containing both rod and cone mechanisms — is adapted to an extended field of one colour (μ) and the sensitivity of the retina to an increase of stimulation is determined by measuring the smallest perceptible intensity of a test stimulus of a different colour (λ) which is applied in brief flashes as an additional stimulus. This measurement gives the so-called increment threshold. Depending on the field intensity and the colours (μ) and (λ) either the rod or the cone

mechanism may be more sensitive to the test stimulus and may determine the measured increment threshold. For the present purpose, the colours (μ) and (λ) must be chosen so that it is the increment threshold of the rod mechanism which is measured up to as high a level as possible.

The relative spectral sensitivity curve of the rod mechanism is known with some certainty : its maximum occurs at a wavelength of about 507 m μ . Make first the incorrect assumption that the extra-foveal cone mechanism is a simple one — like the rod mechanism — with a relative spectral sensitivity corresponding to the so-called photopic visibility curve with maximum at 555 m μ . A suitable wavelength for the test stimulus will then be one for which the ratio of rod to cone sensitivity as given by the curves just mentioned is as great as possible. This means that a wavelength in the blue and not exceeding about 490 m μ should be used. On the other hand, the wavelength of the adapting field should be one for which the ratio of rod to cone sensitivity is as small as possible, and scrutiny of the curves indicates that it should not be less than about 610 m μ .

In fact however the extra-foveal cone mechanism like the foveal cone mechanism is not simple : it comprises several component mechanisms [8]. The properties of these are not known in detail but they are probably sufficiently close to those of the foveal cone mechanisms to warrant the use of the foveal properties as a basis for the argument which follows. Instead of comparing the rod sensitivity curve with a single photopic curve it is now necessary to compare it in turn with the spectral sensitivity curve of each of the

component mechanisms. For the « green » and « red » mechanisms with maxima at about $540 \text{ m}\mu$ and $580 \text{ m}\mu$ respectively — both on the long-wave side of the rod maximum — the comparison leads to much the same conclusions as before, i. e. that the test and field wavelengths should be in the blue and red respectively. But for the blue mechanism with maximal sensitivity at about $445 \text{ m}\mu$ — on the short-wave side of the rod maximum — comparison with the rod sensitivity curve indicates that the most suitable wavelengths would be in the green or red for the test stimulus and in the violet for the adapting field. Thus if a test wavelength of $490 \text{ m}\mu$ and a field wavelength of $630 \text{ m}\mu$ are used, it may be expected that the threshold sensitivities of the « green » and « red » cone mechanism will be kept below that of the rod mechanism up to a very high stimulus level but that there is a danger of the threshold sensitivity of the « blue » mechanism exceeding all three of them before this level is reached. Exploratory experiments using 9° extra-foveal vision (but employing as stimuli spectrum bands obtained from colour filters) showed that this in fact did occur and that the rod threshold sensitivity could be followed to the highest possible levels by using a test stimulus of rather longer wavelength than would have been best if the « blue » cone mechanism were not present. The spectral energy distributions of the green test and red adapting stimuli finally adopted are shown in figure 1.

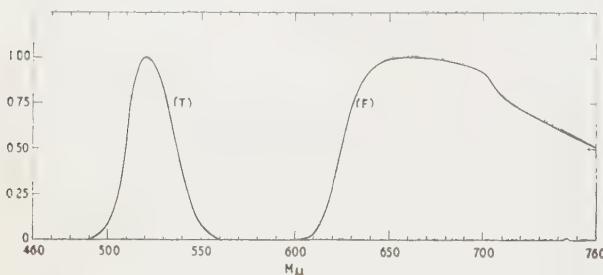


FIG. 1. — The spectral energy distribution of the green test (T) and red field (F) stimuli used in the measurements.

Apart from the proper choice of colours for the stimuli, the following measures were taken to enhance the threshold sensitivity of the rod compared with the cone mechanism.

1) A large (9° diam.) circular test stimulus was used to take advantage of the greater spatial summation of the rod mechanism. The square test stimulus used previously had a side of only 1° [8].

2) The adapting field (20° diam.) and test stimulus were centred at a point 9° from the fovea and in the zone of maximal rod sensitivity (8° to 15° according to measurements by CABELLO & STILES [2]). The optimum condition in this respect may not have been reached however because the construction of the apparatus made it necessary to observe the test stimulus on the temporal side of the fixation point and with a 9°

test stimulus a small part of the outer edge must have overlapped the blind spot.

(3) The rays forming the test stimulus entered the subject's eye as a narrow pencil near the edge of the pupil, which was kept fully dilated by means of the mydriatic eupthalmine hydrochloride. It was hoped that by using « peripheral entry » instead of central entry in the pupil, the response of the cone mechanism would be reduced as a consequence of the STILES-CRAWFORD effect, while the response of the rod mechanism — for which the S-C effect is believed to be absent or small — would be little changed. Subsidiary tests (see below) showed that some advantage was gained in this way provided the test stimulus entered near the temporal edge of the pupil. The rays forming the adapting field, on the other hand, were sent into the eye through the centre of the pupil.

Conditions favourable to rod vision having been fixed, the experiments consisted in determining the increment threshold at various field intensities from zero to the highest obtainable in the apparatus. A plot of the logarithm of the increment threshold against the logarithm of the field intensity for a simple visual mechanism shows normally a horizontal section (constant threshold) at low fields ; the curve then turns upwards until the threshold is increasing at the same or at nearly the same rate as the field intensity and the curve reduces to a straight line of gradient near unity. If at a particular field intensity the measured increment threshold begins to show values below those expected from the run of the curve, this points to the intrusion of a second mechanism which is taking over perception of the test stimulus. But if at very high field intensities the threshold rises at an increasingly rapid rate, then approach to saturation in the sense defined above is indicated.

Experimental. — The general layout of the apparatus is shown diagrammatically in figure 2. The adapting and test stimuli were presented by the method of Maxwellian view. The filaments of a solid

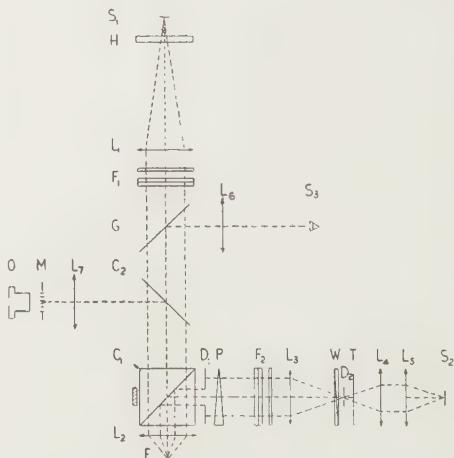


FIG. 2. — Diagram of the optical system.

source projector lamp S_1 at the focus of the lens L_1 produced a parallel beam which was brought to a focus in the centre of the pupil of the subject's eye E by means of the large aperture lens L_2 (a camera lens of focal length 12.5 cm and aperture $f/2$). The filament image was approximately a square of side 1.8 mm. To the subject, the lens L_2 appeared uniformly bright and this bright patch constituted the adapting field. The bright core of a zirconia condensed discharge arc lamp S_2 was imaged on a small aperture in the diaphragm D_2 and the light passing through this aperture was collimated by lens L_3 , reflected at the diagonal surface of the beam-splitter cube C_1 and focussed, finally, in the plane of the subject's pupil by the lens L_2 . This beam provided the test stimulus and it will be clear that it was added to the adapting stimulus. The angular size of the test stimulus as seen by the subject was controlled by the diaphragm D_1 placed at the focus of the lens L_2 , allowing for reflection in C_1 . At its entry in the subject's pupil, the test beam had a diameter of 0.35 mm approximately and by inserting a weak prism P in the beam the point of entry could be displaced from the pupil centre by about 3 mm to the left or right. A rotating sector T in the beam exposed the test stimulus for 0.2 sec. once in every second. A red glass filter and a green gelatine filter were inserted in the field and test beams at F_1 and F_2 respectively to give the required colours (see fig. 1). Intensities were varied by neutral filters also inserted at F_1 and F_2 and in the case of the test beam by a neutral absorbing wedge W whose position could be set by the subject. To protect the filters F_1 , a heat absorbing glass H was inserted in the field beam.

A small point of light to fixate on was provided by imaging a small portion of an under-run lamp filament S_3 in the forward focal plane of lens L_2 , with the aid of the lens L_6 and the inclined plain glass plate G . The subject saw this image at infinity, to the right of the centre of the test stimulus, and at an intensity set by him to make the point of light just visible on the particular adapting field being used. The auxiliary optical system (beam-splitter cube C_2 , lens L_2 , graticule M and eye piece O) enabled the experimenter to view the subject's pupil and to adjust the position of the subject's head — which was fixed by the dental impression method — so that the adapting field beam entered the eye through the pupil centre. This adjustment was of course a preliminary to the actual measurements for which the cube C_2 was removed.

Before beginning a series of measurements the subject was dark-adapted for 30 minutes during the latter part of which he made practice settings. A measurement consisted in setting the wedge so that the test stimulus was just on the limit of visibility, the mean of two independent settings being taken. After each measurement the field intensity was raised and the subject viewed the new field for 2 to 3 minutes before beginning the measurement. A complete run from low to high field intensities took approximately one hour.

The approximate colour temperatures of the radiations forming the test and field stimuli (but with both colour filters and neutral filters and wedge withdrawn from the beams) were measured with a HARDING colour temperature meter [4]. They had the values 3 100° K (test) and 3 050° K (field). The field brightnesses under the same conditions were also measured using an illuminometer and were expressed in scotopic trolands (scotopic photons). The scotopic transmissions of the colour filters and of the colour filters combined with the various « neutral » filters used were then computed from the energy distributions corresponding to light sources of the appropriate colour temperatures, the spectral transmissions of the filters and the relative scotopic luminous efficiency curve of the eye. Using these transmissions the intensities of both test and field stimuli were derived in scotopic trolands.

Four subjects A, B, C and D, all between 20 and 30 years old, took part in the measurements, the left eye being used in every case.

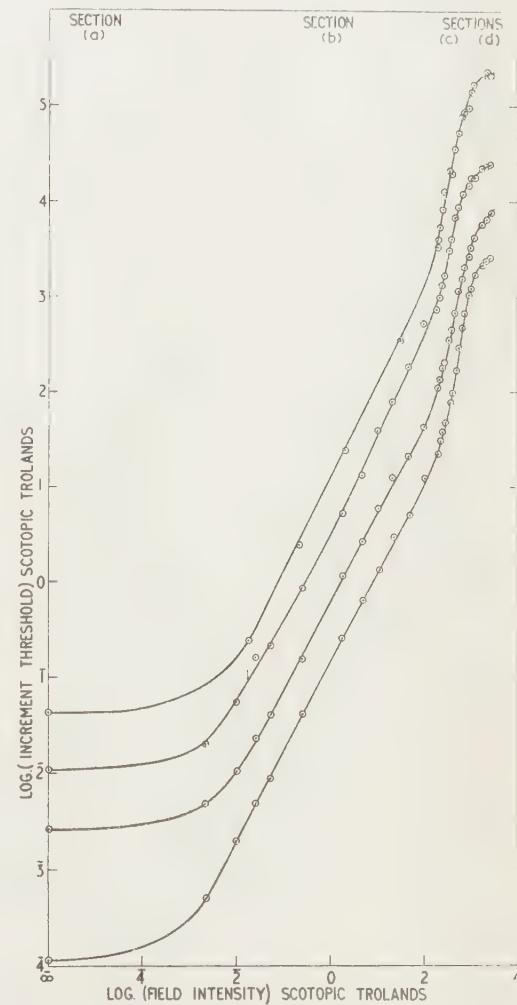


FIG. 3. — The mean results for four subjects showing the increase in the increment threshold with increase in the field intensity ($\log T$ against $\log F$).

Results. — The final curves relating the logarithm of the increment threshold with the logarithm of the adapting field for four subjects are shown in figure 3. Each curve is a mean based on several (at least three) sets of measurements the intensities studied being closely spaced at the higher levels. All the curves are correctly placed with respect to the scale of abscissae, but the scale of ordinates is correct only for curve A, the curves B, C and D being displaced upwards by 0.5, 1.0 and 1.5 log units respectively. The experimental conditions were as follows :

	Test stimulus	Field stimulus
Size and position :	9° diam. with centre displaced 9° to temporal side of the fixation point.	20° diam. with centre displaced 9° to temporal side of the fixation point.
Exposure :	0.2 sec. every second	Continuous
Spectral composition :	Curve T, fig. 1.	Curve F, fig. 1.
Point of entry of stimulus in pupil :	3 mm to temporal side of pupil centre.	Centre of pupil.

The characteristics of all the curves are similar : (a) an initial horizontal section (corresponding to the absolute threshold), (b) an ascending linear section covering about four log units of field intensity and with a gradient $d \log T/d \log F$ of about 0.95, (c) a section of much increased gradient (about 2.7) which sets in fairly sharply at $\log F$ equal to about 2, (d) a final section of low gradient (about 0.5).

In accordance with the interpretation at the end of Section 2, the curve sections (a) (b) and (c) are all attributed to rod vision, section (d) to cone vision. If the difference in directional sensitivity (S-C effect) of the rod and cone mechanisms which has been found for extrafoveal angles of 5° or less operates at the larger extrafoveal angles concerned here, the threshold should be nearly independent of the point of entry in the pupil of the test stimulus beam at field intensities corresponding to the (a), (b), and most of the (c) section of the $\log T$ against $\log F$ curve. As the (d) section is reached the threshold for peripheral entry should be higher than for central entry, provided the (d) section is attributable to cone vision. Tests were made at a series of field intensities to compare the thresholds for a test stimulus entering centrally and 3 mm to either side of the centre. It was found for subject A that the threshold for entry 3 mm to the nasal side was nearly the same as for central entry, at field intensities corresponding to the (d) section as well as the (a), (b), and (c) sections. But for entry 3 mm to the temporal side an increased threshold compared with the threshold for central entry was obtained in the (d) section (fig. 4). These results suggest that the (d) section is attributable to a visual mechanism showing S-C effect but that the maximum response occurs for entry displaced to the nasal side of the pupil centre. The other subjects gave similar results, i. e. little difference in threshold between central and nasal entry, but a higher threshold for temporal entry as the

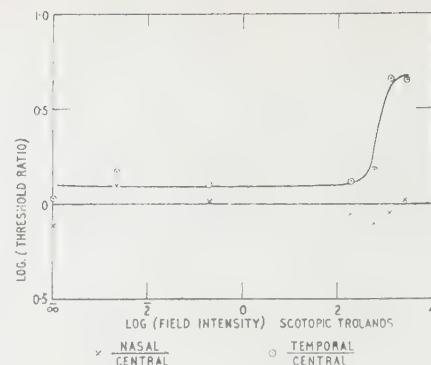


FIG. 4. — Results of tests of the directional sensitivity to the test stimulus at different field intensities.

(d) range of field intensities was reached. Only a few tests were made, sufficient to decide the best point of entry for the main measurements, but the possibility that the cone receptors may normally be sheared over in the extrafoveal retina seems to merit further study.

Although the perceived colour of the test stimulus near the threshold is not easily assessed, the reports of subjects indicated that over most of the range, the test flash was white or colourless, but at high intensities — corresponding approximately to section (d) — the green colour was apparent. This again is consistent with the view that only in section (d) was cone vision determining the threshold.

Accepting the above interpretation, section (c) of the curve represents the approach to saturation of the rod mechanism which was expected. The effect is shown more strikingly by plotting the Fechner fraction (T/F) against the logarithm of the field intensity and this is done in figure 5.

The intrusion of the cone mechanism prevents the « saturation » process of the rod mechanism being followed beyond a certain stage. However, if it is assumed that the gradient $d \log T/d \log F$ of the (c) sections of the curves plotted in figure 3 would at least not diminish if the intrusion of cone vision could be deferred to still higher intensity levels, then an upper estimate of the saturation level based on a conventional but reasonable definition of saturation can be obtained. Suppose that the rod mechanism is defined to be saturated when the Fechner fraction is 100 times the nearly constant value it has in the region of moderate field intensities [the (b) section of the curves of fig. 3]. Applying this criterion, the following values are obtained for an upper limit to the saturation level :

Subject	A	B	C	D	Mean
Log (field intensity to saturate the rod mechanism)	3.59	3.77	3.72	3.68	3.69

(Field intensity expressed in scotopic trolands)

The gradient $d \log T/d \log F$ may continue to increase at higher intensity levels but it seems unlikely from the form of the curves that saturation in the

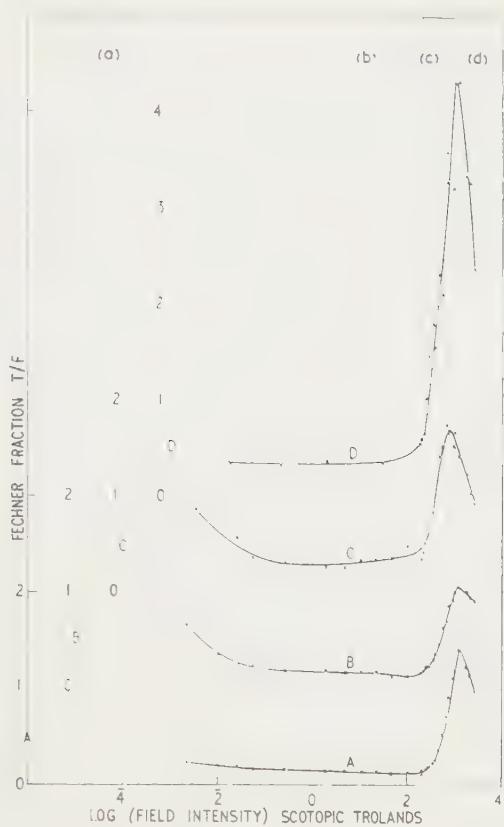


FIG. 5. — The results of Fig. 3 plotted as Fechner fraction T/F against the logarithm of the field intensity.

sense defined above would be reached below about 2 000 scotopic trolands. Our estimate of the saturation level — 2 000 to 5 000 scotopic trolands — would correspond to a luminance of white light (daylight colour) of approximately 120 to 300 cd/m² seen through the natural pupil.

Discussion. — The classical explanation of the form of the curve relating the increment threshold with the field intensity is the photochemical theory of HECHT which postulates a progressive exhaustion of the photosensitive substance in the end-organs as the intensity level is raised. This theory now seems untenable because, as emphasised particularly by BAUMGARDT [1], the rate of absorption of light quanta in the end-organs at the stimulus levels in question is too slow a process. A quite different method of attack has been followed by ROSE [6], [7] and DE VRIES [3]. They point out that because of the inevitable fluctuations about the mean in the number of quanta absorbed in a fixed time and in a given area of the retina, the increment threshold must necessarily increase as the intensity level is raised even if the amount of photosensitive substance in the retina remains constant. The argument as applied to the present measurements may be put in the following form. To simplify calculation suppose that the test and field stimuli used had

been provided by monochromatic light of wavelength 507 m μ (the maximum of the scotopic visibility curve and of the spectral absorption curve of rhodopsin). This will not alter our conclusions as far as rod vision is concerned because whatever the energy distribution of a stimulus it will produce the same number of absorbed quanta in the rods as a stimulus of wavelength 507 m μ provided the scotopic intensities of the two stimuli are the same. A straightforward calculation shows that at a field intensity of F scotopic trolands of wavelength 507 m μ , an angular field area of A square degrees will send into the eye in a period of t seconds an average number of $4.46 \cdot 10^5 F A t$ quanta. The average number absorbed by the rhodopsin of the rods will be $4.46 \cdot 10^5 F A t \theta$ where the fraction θ (called by ROSE the « quantum efficiency ») will depend among other things on the amount of rhodopsin in the rods. As a result of quantum fluctuations the actual number of quanta absorbed in particular periods t will vary about the mean with a standard deviation $\sqrt{4.46 \cdot 10^5 F A t \theta}$. The crux of the fluctuations theory is that if A and t represent the angular size and exposure time of the test stimulus, then the application of the latter must produce an increased absorption of quanta which sufficiently exceeds the quantum fluctuations just evaluated. A test intensity T_1 will on the average produce an additional absorption of $T_1 A t \theta \cdot 4.46 \cdot 10^5$ quanta. Assuming that the stages of the visual process following the light absorption, provide an ideal detection device, ROSE concludes that the threshold intensity T will be given by the equation $T A t \theta \cdot 4.46 \cdot 10^5 = k \sqrt{4.46 \cdot 10^5 F A t \theta}$ where k is a constant called by him the « threshold signal-to-noise ratio ». The value for k must depend on the precise method of determining the threshold. ROSE gives some experimental evidence for a value of k equal to 5 and this will be adopted in what follows.

If the amount of rhodopsin is not materially reduced in the range of field intensities under consideration i.e. if θ remains constant at the value appropriate to full dark adaptation, then the fluctuation theory provides a law of variation of T with F below which the experimental curve cannot fall, however perfect may be the post-absorption mechanism of the retina. It is necessary to assume a suitable value for θ , and various studies of the absolute threshold on the lines of those of HECHT, SHLAER and PIRENNE indicate that $\theta = 0.05$ is of the right order. On inserting $A = 9^2\pi/4$, $t = 0.2$, $k = 5$, $\theta = 0.05$ into the above relation between T and F one obtains the broken line of figure 6, which also shows the rod portion of the experimental curve of T against F , taking the mean for the four subjects.

It is clear that although the mean curve lies above the line derived as above from the fluctuation theory, the agreement ends there. It should be noted that contrary to the statement of ROSE it is not legitimate to extend the « fluctuations » line indefinitely towards low intensities. Quite apart from the details of the retinal

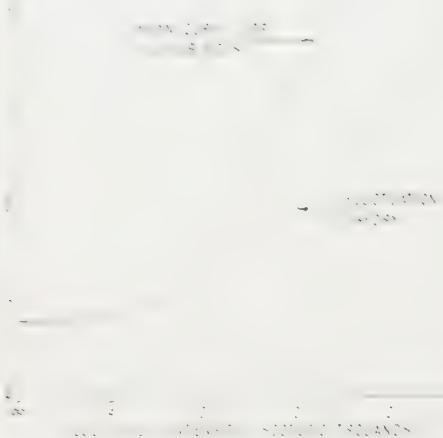
LOG₁₀ INCREMENT THRESHOLD, SCOTOPIC TROLANDS,

FIG. 6. — Comparison of the observed variation of $\log T$ with $\log F$. — The variation derived by fluctuation theory (broken line).

mechanism it is clear that on no acceptable definition of the threshold could the value of the latter for zero field fall below an average absorption in the test flash of about 1 quantum. In fact however it is known that the actual properties of the retina are such that certainly more than one quantum must be absorbed at the absolute threshold. The deviations of the experimental curve from the fluctuation theory line are smallest in the field range 0.002 to 0.008 scotopic trolands. Above this region the experimental curve has about twice the gradient of the fluctuations line and at the end of the (b) section the discrepancy between the observed threshold and the derived lower limit is about two log units. Could this deviation be attributed to progressive exhaustion of rhodopsin? It seems not. From the average number of rods per unit area in the retina (about 12,500 in the retinal area corresponding to 1 sq. deg. of external field) it can be calculated that the number of absorptions per sec. by a rod for a field intensity of 100 scotopic trolands [top of (b) section of the experimental curves] is about $4.46 \cdot 10^5 F / 12,500$ or about 220 per sec. The number of rhodopsin chromophore groups in a fully dark-adapted rod may be estimated from the figure $1 \cdot 10^9$ derived for the rod of the frog by BRODA, GOODEVE and LYTHGOE. Allowing for the smaller size of the human rod and its smaller content of rhodopsin, a value of between 10^7 and 10^8 is obtained. The subject in the present experiments was initially dark-adapted and if it be assumed that he was immediately exposed to the field intensity of 100 scotopic photons

then even after a complete hour (about the duration of a series of measurements) at the most some ten per cent of the chromophore groups in each rod would have been destroyed. Thus even ignoring possible regeneration of rhodopsin the effect on the « quantum efficiency » would be quite inadequate to explain the separation of the experimental curves from the fluctuation theory line.

It appears therefore that the scotopic mechanism is not capable of exploiting to the full extent the signal-to-noise ratio present at the level of the initial light absorption, and that its capacity to do so falls off with increasing field intensity. An ideal mechanism in the sense of fluctuation theory must be able to « sum » the absorption occurring within the test area during the test exposure. If the actual mechanism can « sum » only over a smaller area or a shorter time, the theoretical signal-to-noise ratio derived on the assumption of one such smaller area or time interval (contained in the actual area or time), will be reduced by a factor equal approximately to the square root of the ratio of the smaller to the larger area or time. If in going from low to high field intensities the effective summing area is reduced to one hundredth, the derived increment threshold at the higher intensity will be increased only tenfold. Thus to explain the (b) section of the curves a very large change in effective summing area would be necessary. PIRENNE and DENTON [5] have recently given a theory of visual acuity postulating a retinal mechanism which would have in a certain sense a summing area that automatically contracted as the intensity level was raised. To apply their conception to the present problem it would seem necessary to assume that their larger units, effective at low intensities, become fully active (saturated), so that the discrimination of an added test stimulus at higher intensities would depend entirely on the smaller units, however large the test stimulus.

An interesting attempt to explain the fact that the increment threshold increases nearly proportionally with the field intensity and not with the square root of the latter, was made by VAN DER VELDEN [10]. He suggests that the individual quantum absorptions in end-organs produce individual pulses in attached nerve fibres, but that, since the nerve fibres have a refractory period, some absorptions will fail to produce pulses. This will occur to an increasing extent as the field intensity is raised. He then considers the signal-to-noise ratio based on the number of nerve pulses instead of on the number of quantum absorptions. He quotes a calculation (not given in detail) which leads to the desired proportionality of increment threshold and field intensity in the limit of high intensities.

At the top of the (b) section of the experimental curves where F equals approximately 100 scotopic trolands each rod absorbs quanta at a rate ρ of about 220 per sec., on the assumption that the « quantum efficiency » θ is not very different from the value for dark adaptation. If a refractory period of τ sec. is

associated either with the rod itself or its attached nerve fibre, the average number v of absorbed quanta per sec. which result in pulses can be shown to be $v = \rho/(1 + \rho\tau)$. With a refractory period of 0.01 sec., v/ρ has the value 1/3.2 for $\rho = 220$, i. e. about one third of the absorbed quanta produce pulses. A simple calculation, which need not be given in detail, shows that with a refractory period of 0.01 sec. the simple fluctuation theory (treating the area and exposure time of the test stimulus as the summation unit) would still lead to a threshold at $F = 100$ scot-trolands well below — by about one log unit — the observed value. By assuming a longer refractory period, with a fixed summation unit, agreement could be obtained, and accepting VAN DER VELDEN's conclusion that the increment threshold approaches proportionality with the field intensity, the (b) section of the experimental curve might be explained. Alternatively, a summation unit shrinking with increased field intensity (PIRENNE and DENTON) may explain the (b) section, and the sharp switch to the (c) section may represent the effect of a suitable refractory period. However in the intensity range corresponding to section (c), the possibility of some reduction in concentration of rhodopsin cannot be excluded.

Taking the fluctuations theory as starting point we have considered various special properties of the scotopic mechanism which might account for the obser-

ved form of the curve of \log (increment threshold) against \log (field intensity). It is not yet possible to say whether the approach to saturation at high intensities is to be attributed mainly to exhaustion of rhodopsin in the rods or to a limitation imposed by a refractory period in the rod response system.

Acknowledgments. The assistance of Miss P. FOWLER, Miss S. IDE and Miss E. KINRADE who acted as subjects is acknowledged. The investigation was carried out as part of the research programme of the National Physical Laboratory, and this paper is published by permission of the Director of the Laboratory.

Manuscript received April, 1953.

REFERENCES

- [1] BAUMGARDT, *Les Théories Photochimiques de la Vision*, éd. Rev. d'Optique, Paris, 1950.
- [2] CABELLO & STILES, *Ann. Real. Soc. Espan. Fis. y Quim. [A]*, t. **46**, 1950, p. 251.
- [3] DE VRIES, *Physica*, t. **10**, 1943, p. 553.
- [4] HARDING, *J. Sci. Inst.*, t. **29**, 1952, p. 145.
- [5] PIRENNE & DENTON, *Nature*, t. **170**, 1952, p. 1039.
- [6] ROSE, *Proc. I. R. E.*, t. **30**, 1942, p. 295.
- [7] ROSE, *J. O. S. A.*, t. **38**, 1948, p. 196.
- [8] STILES, *Proc. Roy. Soc., B*, t. **127**, 1939, p. 64.
- [9] STILES, *Rev. d'Opt.*, t. **28**, 1949, p. 215.
- [10] VAN DER VELDERN, *Nederl. Tijds. v. Natuurk.*, t. **15**, 1949, p. 146.

COLLOQUE SUR LES PROBLÈMES OPTIQUES DE LA VISION

tenu à Madrid du 15 au 21 avril 1953 à l'Institut d'Optique « Daza de Valdes »

par L. PLAZA

Instituto de Optica, Madrid

Divers Colloques internationaux ont eu lieu à Madrid en avril 1953 à l'occasion du cinquantième anniversaire de la « Real Sociedad Española de Fisica y Quimica » ; c'est ainsi que 80 spécialistes, venus de 16 pays, se réunirent à l'Institut d'Optique du « Consejo Superior de Investigaciones Cientificas » pour présenter et discuter des travaux sur les *problèmes optiques de la vision*.

Ce Colloque était patronné par l'Union Internationale de Physique Pure et Appliquée ; il fut organisé par le Comité espagnol de physique par les soins du Professeur J. PALACIOS, président de ce Comité, du Dr L. VILLENA, secrétaire du même comité et du Dr L. PLAZA, secrétaire du Comité espagnol d'Optique.

Le Professeur J. A. DE ARTIGAS, président du Colloque, inaugura celui-ci par une causerie sur le développement historique de l'Optique en Espagne ; le Professeur J. M. OTERO le termina par un remerciement adressé à tous les assistants qui avaient contribué à rendre la réunion si intéressante.

En dehors de la présentation d'une quarantaine de travaux sur divers sujets en rapport avec la vision, quatre conférences générales furent prononcées pendant ce Colloque :

La vision binoculaire aux faibles excitations dans laquelle le professeur Y. LE GRAND (*Muséum national d'Histoire naturelle*, Paris) exposa ses idées sur les modifications qu'il semble nécessaire d'apporter aux concepts de la vision binoculaire, fondés jusqu'à maintenant uniquement sur des bases géométriques ; il traita du problème des limites et de la stabilité de la correspondance binoculaire et fit une revue critique de diverses propositions, appuyées sur des bases anatomiques, tendant à expliquer la vision binoculaire.

Le Professeur W. S. STILES (*National Physical Laboratory*, Teddington) montra dans sa conférence, *Further studies of threshold sensitivity by the two colour threshold technique*, les nouveaux résultats obtenus sur le mécanisme de la vision des couleurs au moyen de son ingénieuse méthode expérimentale, utilisée déjà depuis bien des années et constamment perfectionnée. Ces résultats conduisent à la conclusion qu'il existe 5 types de récepteurs, voire 7.

La conférence du Professeur R. GRANIT (*Med. Nobel Institutet*, Stockholm), *Research on chromatic vision by electrophysiological means*, fut une étude complète des méthodes électrophysiologiques.

Finalement le Professeur G. WALD (*Harvard University*, Mass. U. S. A.) exposa, dans sa conférence intitulée *The chemical basis of visual excitation*, les derniers

résultats obtenus dans son laboratoire sur les changements et transformations des pigments photosensibles et exposa aussi ses idées sur le mécanisme possible de régénération du pourpre rétinien et sur l'existence d'autres « opsines ».

Les travaux se divisèrent en 4 sessions, suivies chacune de discussions.

Première session : Présidée par le Professeur R. GRANIT : C. SOLIS et M. AGUILAR (*Instituto de Optica*, Madrid) présentèrent les résultats de leur étude sur l'influence de la longitude dans la perception de tests de même largeur, aux basses brillances et en observation extra-fovéale, à 17°.

A. ARNULF, M^{lles} F. FLAMANT et O. DUPUY (*Institut d'Optique*, Paris) donnèrent une formule pour les limites de perception en fonction de la luminance de l'objet et du diamètre pupillaire, applicable à la vision nocturne et à la vision extrafovéale crépusculaire et diurne.

A. BOUMAN (*Werkgroep Waarheming*, Hollande) présenta les résultats de ses mesures de seuil absolu et de contraste sur tests circulaires et linéaires, ainsi que ceux de mesures sur tests mobiles et ponctuels, en décrivant les dispositifs expérimentaux utilisés pour ces dernières déterminations.

M. A. FOURNIER (*Instituto de Optica*, Madrid) étudia en détail la relation entre le seuil absolu et la surface du test, pour une position fixe extrafovéale, montrant les diverses valeurs que prend l'exposant x dans la formule $Bu^x = K$.

C. H. GRAHAM (*Office of Naval Research*, London) présenta les résultats d'un travail réalisé à la Columbia University sur la variation du seuil de luminance dans la perception de tests en forme de réseau, en fonction de la constante du réseau et de l'état d'adaptation.

OTERO, AGUILAR et M^{le} J. YUNTA (*Instituto de Optica*, Madrid) étudièrent les phénomènes de sommation totale, en relation avec la grandeur des groupements récepteurs de la rétine et prouvant la dépendance entre la luminance d'adaptation et la zone intéressée de la rétine.

A. H. PIRENNE (*Université d'Aberdeen*, Ecosse) exposa ses idées au sujet des méthodes électrophysiologiques pour la détermination des seuils, arrivant à la conclusion que les valeurs obtenues sont trop élevées, ce qui pourrait s'expliquer par le fait que ces méthodes n'atteignent que des unités spéciales de la rétine, unités qui ne prennent pas part à la vision des formes.

G. TORALDO et Mlle FIORENTINI (*Istituto di Ottica*, Florence) présentèrent les résultats obtenus par mesures photométriques de franges d'interférences projetées directement sur la rétine et les comparant aux résultats obtenus en vision ordinaire.

A. IVANOFF (*Muséum national d'Histoire naturelle*, Paris) présenta les nouveaux résultats de mesures de l'aberration sphérique, effectuées sur 10 observateurs, par la méthode déjà utilisée, confirmant son augmentation brusque aux distances supérieures à 0,75 mm de l'axe.

Finalement J. RÖSCH (*Observatoire du Pic du Midi*, Bagnères-de-Bigorre) démontra la possibilité de fusionner stéréoscopiquement les taches diffusées et l'application possible qui pourrait en être faite pour résoudre les problèmes de photométrie hétérochrome et étudier les anomalies de la perception des couleurs.

Seconde session : Présidée par le Professeur VAN HEEL :

A. ARNULF, Mlles O. DUPUY et F. FLAMANT (*Institut d'Optique*, Paris), à partir de travaux antérieurs, définirent la meilleure mise au point possible pour l'œil et les tolérances permettant de définir la grandeur tolérable pour les aberrations.

S. S. BALLARD (*Tufts College*, Mass. U. S. A.) présenta divers types de filtres polarisants et colorés permettant d'obtenir une variation continue de ton et de saturation dans la partie la plus importante du diagramme chromatique.

A. GALLEGOS (*Physiologie*, Université de Cadix) décrivit des variantes de la méthode de GROSS pour l'imprégnation de la rétine entière et de ses éléments, présentant un grand nombre des photomicroographies ainsi obtenues. Dans une autre communication il étudia les fibres centrifuges dans la rétine de divers animaux et discuta des surfaces d'innervation.

A. IVANOFF (*Muséum national d'Histoire naturelle*, Paris) mesura par une méthode subjective la variation de la convergence des yeux en fonction de la luminance ; les premiers résultats obtenus indiquent la possibilité d'une relation entre ce phénomène et ceux de la presbytie et de la myopie nocturnes.

M. LOPES-ENRIQUEZ (*Instituto de Optica*, Madrid) décrivit un ingénieux procédé permettant l'ophtalmoscopie sans reflets en images directes et inversées et aussi la biomicroscopie du fond de l'œil.

J. MONTOJO et P. JIMENEZ-LANDI (*Laboratoire et Atelier de Recherches de l'E. M. Armada*, Madrid) exposèrent une méthode permettant la localisation du plan image dans un instrument visuel et comparèrent les résultats obtenus expérimentalement avec les calculs pour des instruments avec coma et astigmatisme.

H. SCHOBEL (*Université de Hambourg*) étudia les meilleures conditions d'obtention de radiographies : tension, intensité, dimensions du foyer, nature des films, etc... en fonction des conditions visuelles de l'observateur.

G. TORALDO et Mlle L. RONCHI (*Istituto di Ottica*, Florence) décrivirent quelques expériences sur la diffu-

sion de la lumière par la rétine, dont on peut déduire que la distribution des éléments rétiniens semble être celle d'un réseau.

E. DIAR-CANEJA (*Ophthalmologie*, Université de Valladolid) traita de l'interprétation des phénomènes perceptifs, acceptant l'existence d'une connexion variable entre les centres et présenta une expérience d'inhibition visuelle confirmant ces hypothèses.

Troisième session : présidée par le Professeur P. FLEURY :

M. AGUILAR et W. S. STILES (*National Physical Laboratory*, Teddington) étudièrent la zone de saturation des bâtonnets par la méthode du seuil bicolore obtenant une limite de 2 000 à 5 000 trolands scotopiques.

A. BIOT (Gand) calcula la variation de l'éclairement sur la rétine au passage de la zone fovéale à la zone extrafoviale, variation insignifiante. Comme la luminance apparente d'une source étendue ne varie pas non plus sensiblement, il arrive à la conclusion que la constitution de la rétine, si différente d'une zone à l'autre, n'a aucune influence dans ce cas.

E. J. DENTON (*Université d'Aberdeen*, Ecosse) présenta les résultats de mesures d'ouverture de la pupille d'un Gecko (bâtonnets) en fonction de l'intensité de la source lumineuse pour différentes compositions spectrales et sous diverses incidences.

K. O. DONNER (*Université d'Helsingfors*, Finlande) exposa le résultat de ses travaux sur la sensibilité spectrale de la rétine du pigeon, déterminée par la méthode de GRANIT.

H. HARMS (*Université de Tübingen*) analyse l'œil humain comme photomètre, comparant sa sensibilité différentielle pour les différentes régions de la rétine et pour divers états d'adaptation.

Mlle R. HUBBARD (*Carlsberg Laboratory*, Copenhague) étudia les valeurs obtenues pour le poids moléculaire de la rodopsine en passant des solutions à l'ultracentrifugeuse, comparant les résultats à ceux obtenus par HECHT et concluant que le poids moléculaire doit correspondre à l'hypothèse d'un seul chromophore par molécule.

F. W. CAMPBELL (*Nuffield Lab. Ophthalmology*, Oxford) trouve 0,64 dioptries comme valeur moyenne de l'influence du cristallin dans la myopie nocturne, détermination faite en photographiant les images de PURKINJE.

A. M. MONNIER (*Laboratoire de Physiologie générale de la Sorbonne*, Paris) étudia les phénomènes qui apparaissent dans l'observation nocturne de sources ponctuelles et en attribue les causes à la structure du cristallin et à l'aberration sphérique.

G. FRANKE (*Leitz*, Wetzlar) montra qu'il est nécessaire de tenir compte des propriétés de l'œil en calculant un oculaire d'instrument visuel et que le calcul peut être simplifié en utilisant quelqu'une de ces propriétés.

Quatrième session : présidée par le Professeur W. S. STILES :

H. J. A. DARTNALL (*Institut d'Ophthalmologie*, Londres) étudia les courbes d'absorption des pigments visuels, arrivant à la conclusion que la forme de la courbe est la même pour tous, seule varie la position du maximum ; il donna un nomogramme permettant de dessiner les courbes connaissant le maximum.

E. F. FINCHAM (*Institut d'Ophthalmologie*, Londres) exposa les relations entre le réflexe d'accommodation, l'aberration chromatique de l'œil et la composition spectrale du stimulus, relations applicables aussi à des individus dont la vision des couleurs est défectueuse.

M^{me} FLAMANT (*Institut d'Optique*, Paris) étudia l'effet STILES-CRAWFORD, et en particulier sa variation perceptible au passage de la vision fovéale à la vision extrafovéale et de vision diurne en vision nocturne.

G. HANSEN (*Zeiss Opton*, Oberkochen) présenta les résultats de ses travaux sur l'effet STILES-CRAWFORD de seconde espèce, c'est-à-dire la dépendance entre la couleur et l'ouverture pupillaire, pour différents états d'adaptation.

D. B. JUDD (*National Bureau of Standards*, Washington) tenta d'expliquer, au moyen de la théorie trichromatique de la vision et de diverses hypothèses sur l'adaptation chromatique, les couleurs qui apparaissent dans l'observation entoptique de la macula, pour les différents types de vision des couleurs.

L. PLAZA et A. CRUZ (*Instituto de Optica*, Madrid) présentèrent une série de résultats sur les couleurs perçues aux luminances de seuil et sur l'intervalle achromatique, suivant la longueur du spectre.

R. A. WEALE (*Institut d'Ophthalmologie*, Londres) étudia 5 cas de monochromatisme des cônes, déterminant la courbe d'efficacité lumineuse, et en déduisit un argument en faveur des théories des zones pour la vision des couleurs.

G. TORALDO (*Istituto di Ottica*, Florence) compara les effets de « crispening » en télévision aux courbes rétinographiques et suggéra l'existence dans la rétine d'un mécanisme analogue introduisant une réponse non linéaire.

L. C. THOMSON et W. D. WRIGHT (*Imperial College*, Londres) présentèrent les résultats obtenus sur tritanopes dans la détermination des points de confusion à partir de nouveaux résultats expérimentaux et calculerent de nouvelles courbes fondamentales de réponse.

M. AGUILAR et L. PLAZA (*Instituto de Optica*, Madrid) étudièrent le point d'efficacité maximum de la pupille en fonction de la distance angulaire du stimulus au point de fixation.

Ainsi se termina ce Colloque qui, en plus de l'intérêt qu'il suscita, favorisa les prises de contact personnelles entre spécialistes d'un même domaine, venus de tant de pays différents.